Istituto Statale d'Istruzione Superiore
"Arturo Malignani" - Udine

Istituto Tecnico Industriale "A. Malignani"
Sezione di Telecomunicazioni e Informatica
Dipartimento di Elettronica

Problem Solving Strategies

Versione 0v31
Settembre 2014
prof. Santino Bandiziol

Indice

Convenzioni adottate nel testo

Il testo normale è scritto utilizzando il presente carattere tipografico e stile di scrittura. Si è cercato di evitare inutili inglesismi ed un eccesso di acronimi, ma trattandosi di appunti tecnici è inevitabile il ricorso all'inglese tecnico e a frequenti abbreviazioni.

Nella prima eventualità, il termine in inglese incontrato per la prima volta viene scritto in corsivo, come nel caso della parola *font* (carattere tipografico). Nell'ipotesi in cui sia ritenuto utile, fra parentesi viene indicata una possibile traduzione che tenga conto del contesto. Le successive volte in cui la stessa parola viene riutilizzata, non verrà più evidenziata in corsivo, dando per acquisito il termine.

Quando lo si ritiene utile la presente convenzione viene usata a "rovescio", ponendo tra parentesi la traduzione inglese di un termine italiano, come nel caso in cui si voglia parlare del carattere tipografico (*font*) e fornirne la traduzione.

L'uso degli acronimi segue regole simili. Viene indicato l'acronimo in grassetto e tra parentesi il suo significato, come nel caso dell'acronimo **PC** (Personal Computer). A volte la parentesi è omessa, come nel caso in cui la spiegazione del significato venga fornita in forma discorsiva e non didascalica. Anche in questo caso, successivi usi dello stesso termine non prevedono nè il grassetto nè l'indicazione del significato posto fra parentesi.

Il corsivo viene utilizzato anche per termini e frasi in italiano che si intendono *enfatizzare*, come nel presente caso. Si è comunque cercato di non abusare di tale convenzione.

L'icona di pericolo è utilizzata per richiamare l'attenzione del lettore su un passaggio particolarmente importante. E' bene, quindi, leggere con attenzione quanto evidenziato dalla presenza del triangolo di pericolo.

Introduzione

I presenti appunti contengono alcune riflessioni sulle tecniche di *Problem Solving*. Vengono presi in esame alcuni metodi relativamente diffusi per affrontare problemi di natura scientifica o tecnica.

Prima, però, di addentrarci nelle diverse tecniche presentate si desidera richiamare l'attenzione del lettore sul modo in cui gli argomenti sono stati presentati.

Negli ultimi anni, dopo che nel 2006 è stato ufficializzato un primo quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente, la didattica ha posto l'accento su tre princìpi fondamentali dell'apprendimento: sui saperi, sulle abilità e sulle competenze. Normalmente la documentazione fornita agli allievi è incentrata sui saperi, ovvero sui singoli argomenti, più o meno armonicamente legati fra loro, trattati nelle diverse discipline scolastiche. Le abilità e le competenze frequentemente non venivano trattate direttamente ma indirettamente, attraverso lo studio dei saperi.

Nelle presenti pagine, si è cercato di porre, invece, l'accento sulle competenze e sulle abilità, in modo tale che "risolvere un problema", non fosse frutto dell'applicazione di una fredda tecnica di sintesi imparata a memoria, ma parte della cultura dello studente.

Normalmente l'allievo, soprattutto all'inizio del triennio (i presenti appunti sono pensati per ragazzi che affrontano il triennio di un ITI), affronta i problemi in maniera poco metodica, affidandosi solamente al proprio intuito e alla propria fantasia. In realtà la capacità di risolvere efficacemente un problema tecnico-scientifico di natura scolastica (e non solo) implica una serie di caratteristiche che fanno già parte del bagaglio culturale dello studente (in forma minore o maggiore), ma frequentemente non appieno sfruttate:

- senso critico:
- precisione di linguaggio e di calcolo;
- capacità di analisi;
- capacità di sintesi;
- autonomia di pensiero.

La prima caratteristica può essere vista come facente parte delle competenze di un allievo (si *è* critici o meno, dubbiosi o meno) e probabilmente fra tutte è quella che primariamente va alimentata e rafforzata, in quanto condizione *sine qua non* di un corretto studio. Anche l'autonomia di pensiero è una competenza dell'allievo. Forse è l'ultima in termini cronologici della quale ci si impossessa, ma è sicuramente quella che meglio contraddistingue la persona matura.

La precisione del linguaggio e del calcolo come pure la capacità di analisi possono sicuramente essere annoverate fra le abilità, mentre la capacità di sintesi è una caratteristica che appartiene alla sfera dei saperi.

Promuovere queste cinque caratteristiche naturali dello studente sicuramente rafforza la sua capacità di risolvere problemi o per lo meno di affrontarli correttamente.

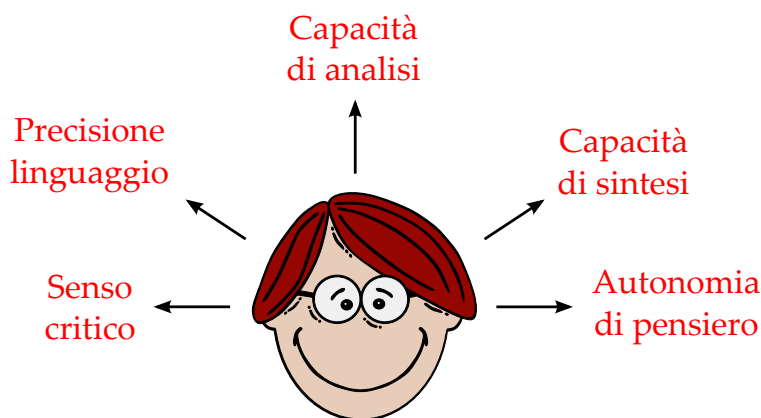



Figura 1: Caratteristiche da sviluppare

Naturalmente non ha senso tenere una lezione di 2 ore sul senso critico e pretendere di aver esaurito l'argomento: l'allievo va educato in tal senso lentamente e costantemente lungo l'intero suo percorso scolastico. L'intero Consiglio di Classe è chiamato a collaborare per aiutare lo studente a rafforzare le suddette caratteristiche. Alcune riflessioni utili sia allo studente che al CdC potrebbero essere le seguenti:

- **senso critico** - tutte le materie dovrebbero essere coinvolte nel processo di rafforzamento del senso critico dello studente. Un primo passo semplice da effettuare potrebbe essere dato dalla onnipresente domanda "perché" che lo studente dovrebbe essere indotto a porsi, sia durante lo studio e le consegne casalinghe, sia durante le ore scolastiche. Studiare significa chiedersi continuamente "perché". Imparare significa chiedersi meno frequentemente "perché", fino, al limite, a non chiederselo affatto: il pappagallo impara un sacco di parole senza chiedersi assolutamente nulla. Lo studente non deve, però, essere indotto a pensare che un atteggiamento critico sia utile solo in fase di ascolto (utilissimo, naturalmente), ma anche e soprattutto nei confronti delle proprie idee e convinzioni, alle quali, solitamente, siamo tutti un po' affezionati.

  > *"Criticare è valutare, impadronirsi, prendere possesso intellettuale, insomma stabilire un rapporto con la cosa criticata e farla propria.*
  >
  > Henry James - Le prefazioni

  Ma il motore di ogni sano senso critico è il dubbio. E' quel punto di domanda che compare nella mente all'improvviso e che non deve mai essere soffocato ma continuamente alimentato. Sia dagli allievi che dagli insegnanti.

> *"Un buon insegnante è pieno di dubbi e mostra come si esce dal dubbio, non attraverso la lettura dell'oroscopo, ma usando gli strumenti della mente e della ragione e avventurandosi nel campo del sapere, del sapere umano che è vastisssimo e che contiene però anche la risposta a quel quesito, non importa se appena trovata darà adito a un altro dubbio e a una nuova questione."*
>
> Vittorino Andreoli - Lettera a un insegnante

Le presenti pagine trattano l'argomento ripetutamente e da diverse angolazioni;

- **precisione di linguaggio e di calcolo** - un secondo passo relativamente facile da programmare in un CdC è la cura della precisione espositiva e del calcolo. A volte, se confrontata con certi compiti o relazioni, la Stele di Rosetta è di più facile decifrazione. Un maggior ordine espositivo, sia orale che scritto, aiuta, invece, a minimizzare gli errori e le imprecisioni. Se lo studente è costretto a formulare, ad esempio una semplice domanda, in maniera chiara e precisa, è costretto a riflettere, se non altro, sulla forma sintattica da usare e ciò costituisce già di per sé un primo passo chiarificatore. Un'altra cattiva abitudine che lo studente pone frequentemente in evidenza la si nota durante i calcoli effettuati alla lavagna, soprattutto nelle materie di indirizzo, ove sono spesso coinvolte le unità di misura: appena può, lo studente abbandona il calcolo letterale e sostituisce i simboli con i numeri ad essi associati. Ciò riduce la complessità del calcolo, ma toglie completamente la possibilità di analisi dimensionale sia del risultato che dei passaggi intermedi con conseguente impossibilità di porre in evidenza eventuali errori sia concettuali che algebrici. Il calcolo andrebbe, invece, svolto in forma letterale fino alla fine e solo all'ultimo passaggio, dopo una rapida analisi dimensionale, andrebbero sostituiti i numeri ai simboli. In tal modo il calcolo non è più meccanico, ma guidato dalla ragione;
- **capacità di analisi** - il rafforzamento di questa caratteristica costituisce di gran lunga il compito più impegnativo, sia per lo studente che per l'insegnante. Ma cosa si intende per "analisi"?

  Dal dizionario della lingua italiana:

  analisi
  s.f. inv.
  Metodo di ricerca basato sulla scomposizione, concreta o astratta, di un tutto nelle sue parti costitutive: ***a.*** *di un pensiero filosofico, di un periodo storico.*

  Analizzare significa quindi soprattutto scomporre. Scomporre qualcosa nelle sue parti costitutive non è però cosa nè semplice nè immediata. E' un processo che necessita di molto esercizio e di molto tempo e pazienza. Non solo. Per lo studente non è nemmeno naturale. A spiegarlo è Vittorino Andreoli, in due suoi libri molto conosciuti: "Lettera a un adolescente" e "Lettera a un insegnante":

  > *"Ed ecco la grande scoperta, una delle tappe straordinarie della scienza, e mi fa piacere cominciare questa epistola proprio con un riferimento scientifico, anche per dirti che, nonostante mi occupi di*

singoli, di individui, ho bisogno di conoscere tutto quanto la scienza va scoprendo sulle leggi che regolano le caratteristiche della specie umana e dunque del comportamento dell'uomo, non del singolo uomo.

Si è scoperto il cervello plastico: un'espressione quanto mai lontana dalla fissità di un cristallo. Esistono aree del cervello non cristallizzate, prive cioè di una strutturazione esistente fin dalla nascita o raggiunta definitivamente subito dopo, e da quel momento fissata per sempre. Le aree plastiche hanno invece un'enorme potenzialità e dunque possono organizzarsi sulla base di un'esperienza. Senza quella esperienza, che significa quel rapporto specifico tra singolo e ambiente in cui vive in quel momento, non avverrebbe nulla."

Vittorino Andreoli - Lettera a un adolescente

e ancora più chiaramente in "Lettera a un insegnante"...

"Ma adesso ti devo condurre dentro il cervello, in un viaggio breve, come richiede una lettera, per chiarire un passaggio incredibile che questi due ultimi decenni hanno permesso e che ha rilievo per l'insegnamento e quindi per il modello di scuola da attuare, se vuole rispondere con il proprio sistema specifico ai bisogni della crescita.

Fino a quindici-vent'anni fa, gli studi sul cervello incontravano un limite notevole: dominava la concezione che si trattasse di un organo perenne, una di quelle strutture che si realizzavano rapidamente (e in parte già nel feto) e che da allora non c'era nient'altro da fare, come per un cristallo. Le uniche modificazioni possibili erano al negativo, nel senso della patologia e quindi di lesioni che si rimarginavano con danni permanenti.

[...] *Nella mappa anatomica del cervello, in quei tempi, c'erano aree in cui si poteva scrivere l'*hic sunt leones *delle antiche mappature della Terra. Aree in cui sperimentalmente non capitava nulla, sia che si provocassero delle stimolazioni, sia che si producessero al loro interno delle lesioni. Si chiamavano anche zone mute del cervello per differenziarle da quelle motorie o sensitive che, con le stesse tecniche, mostravano invece di far muovere un arto o parte del corpo, di attivare sensazioni come se il corpo venisse colpito da un oggetto (tatto) oppure da qualcosa che provoca dolore. Nell'*hic sunt leones *non capitava nulla e la tendenza era di dire che si trattava di aree inutili o sovrabbondanti, analogamente ad altre zone anatomiche extracerebrali con duplicazione di organi o un potenziale operativo che superava le richieste medie dell'azione.*

Queste aree cerebrali erano localizzate nei lobi frontali e in parte in quelli temporo-parietali.

Ebbene, la rivoluzione a cui mi riferisco, del tutto sovrapponibile al mutamento di visione dell'universo provocato dal cannocchiale di Galileo, è l'aver scoperto che queste aree sono deputate alle funzioni superiori, a tutte quelle che servono all'apprendimento. Non solo, queste zone non hanno una struttura precisa, fissata, ma sono in grado di organizzarsi a seguito di una esperienza e quindi, appunto, dell'apprendimento. Sono in grado di strutturarsi ex novo *e persino di mutare.*

> [...] (Eric Kandel, Premio Nobel per la medicina nel 2000, NdA) *potè dimostrare che quell'apprendimento* [...] *produceva una modificazione permanente dei neuroni, che ora erano diversi sia anatomicamente sia funzionalmente, e così diede la prima dimostrazione scientifica che un apprendimento era, di fatto, un mutamento fisico a livello neuronale.*
>
> [...] *E' veramente necessario che la scuola tenga conto di questo sapere, se vuole essere al servizio della crescita e dei nuovi bisogni emersi."*
>
> Vittorino Andreoli - Lettera a un insegnante

Perché allora l'analisi dovrebbe essere un problema per lo studente? Perché numerosi studi (cfr. LEBEL E BEAULIEU [11]) hanno dimostrato che il lobo frontale si sviluppa sia funzionalmente che in volume ben oltre l'adolescenza. Ciò implica che la capacità di analisi e di ragionamento dell'adolescente è ancora in via di formazione e che se confrontata con quella dell'adulto (insegnante, genitore) può apparire fragile o addirittura insufficiente[1].
Lo studente va quindi accompagnato con pazienza e perseveranza lungo il cammino del rafforzamento della sua capacità di analisi. E si tratta di un cammino che non può essere circoscritto a 2-3 lezioni sugli algoritmi o sul *problem solving*, ma che durerà per tutta la sua vita di studente ed oltre. Ciò non significa che non si deve chiedere allo studente di ragionare, anzi, ma che è necessario ricordare che una sviluppata capacità di analisi si conquista con il tempo e l'esercizio.

Fortunatamente sono molte le materie e gli argomenti che naturalmente rafforzano la capacità di analisi dello studente: lo studio di una funzione matematica, la definizione dello schema a blocchi di un sistema di controllo, l'induzione e la ricorsione, la definizione del diagramma degli stati di un automa, l'analisi logica e grammaticale di una proposizione, la logica dei predicati, la geometria analitica e alcuni aspetti della geometria descrittiva, ecc.
Lo studente farebbe quindi bene a porre molta attenzione a quegli argomenti che implicano un'attenta analisi prima della (meccanica) sintesi. Analogamente, il CdC farebbe bene a coordinare gli sforzi per permettere un sano rafforzamento del suddetto aspetto del ragionamento;

- **capacità di sintesi** - è l'attività che lo studente preferisce e dove ottiene i risultati migliori. Si tratta del famoso "come si fa". Il mondo della scuola è già perfettamente organizzato per sviluppare e rafforzare questa qualità nello studente. Paradossalmente bisognerebbe fare qualcosa per contenere gli effetti di tanto sforzo.
  Quando un insegnante (si pensi al docente di matematica) spiega un argomento nuovo, lo studente rimane in trepida attesa del momento in cui gli verrà spiegato, con dovizia di particolari e con buona pace del piacere della scoperta, della problematizzazione, ecc., "come si fa" il calcolo. Tutto il resto, cioè la matematica, passa in secondo piano.

[1] Studenti, ribellatevi! Quando gli adulti vi dicono: "Ma ragionate!", sappiate che barano, dall'alto dei loro lobi frontali perfettamente funzionanti, mentre i vostri hanno ancora il cellophane e puzzano di vernice fresca.

Non si vuole dare la colpa a qualcuno (allievo o insegnante): semplicemente lo studente ha capito che per essere promosso deve "fare così". Semplice adattamento all'ambiente.
La capacità di sintesi è stata, quindi, elencata per questioni di completezza, ma è solitamente ben formata nello studente;

- **autonomia di pensiero** - si tratta sostanzialmente dell'unione delle precedenti caratteristiche. E' il bene più prezioso che l'allievo, in misura maggiore o minore, possiede. Ed è ciò che lo distingue non solo come studente, ma anche come cittadino e uomo. L'autonomia nasce dalla fiducia e la fiducia nasce dall'accumulo di esperienze, non necessariamente tutte positive.
  La scuola dovrebbe quindi proporre esperienze allo studente (lo fa, ad esempio, attraverso l'insegnamento laboratoriale) e lo studente dovrebbe percepire la magia del tempo dell'esperienza (anziché tentare di copiare i risultati ottenuti dal compagno di banco).
  Anche gli esercizi e i problemi proposti in classe o per casa permettono l'accumulo di esperienza e vanno quindi eseguiti con cura e impegno.
  Comunque se lo studente rafforzerà il proprio senso critico, la precisione di linguaggio e di calcolo, le sue capacità di analisi e sintesi, automaticamente avrà anche rafforzato, attraverso l'esperienza, la propria autonomia di pensiero.

A corredo di questa crescita che la scuola ha il compito di alimentare si vuole calare il pensiero di Cartesio, che può risultare utile nel lenire le frustrazioni da "problema non risolto". Le esperienze di cui si è parlato a proposito dell'autonomia di pensiero necessitano di un metodo per essere affrontate con efficacia ed è proprio Cartesio ad offrirci adeguati spunti di riflessione.

Ciò non significa che si deve "imparare come si fa" a risolvere un problema, ma meditare sulla differenza fra avere un metodo che permetta di affrontare efficacemente un problema e non averlo, affidandosi unicamente all'intuito o all'estro creativo che, si sa, è capriccioso.

A tal proposito di vuole mettere in guardia lo studente: egli sarà attratto dal "fai da te" col miraggio di risultati immediati, limitandosi all'applicazione di un metodo solo fintanto che l'insegnante lo richiede (cioè per qualche lezione). Ciò va evitato. Lo studente deve convincersi che il lavoro paga (paga sempre) e che affrontare i problemi, quali essi siano, con metodo e rigore è sempre il modo giusto di affrontarli.

Gli esercizi ed i problemi proposti sono sempre di natura scolastica e di relativa semplicità, in modo che lo studente possa concentrarsi sul metodo piuttosto che sul problema. Proprio a causa della non eccessiva complessità del problema l'allievo potrebbe, però, essere tentato di risolverlo con l'aiuto del solo intuito e della propria fantasia. Non lo faccia, perché quando i problemi aumenteranno di difficoltà, a scuola o dopo, all'università o nel lavoro, non avrà strumenti adeguati per affrontarli.

Buon lavoro.

Udine, 07/09/2014

prof. Santino Bandiziol

Capitolo 1

Discorso sul metodo

Le tecniche che il pensiero moderno propone per affrontare in maniera sistematica e metodica un problema dato sono davvero innumerevoli, a volte soddisfacenti a volte meno. Non si tratta, però, di una necessità dei nostri tempi. Moltissimi sono stati i tentativi, nel corso della storia del pensiero umano, di formalizzare una procedura semplice e chiara a tal fine.

Senza togliere nulla ai molti pensatori che si sono cimentati su detto fronte, il presente capitolo tratterà molto brevemente degli studi effettuati in tal senso da Cartesio, quattro secoli fa. Non si intende con ciò sottolineare alcuna efficacia o bontà del metodo di Cartesio o assumere una qualche posizione in merito, nè tantomeno trattare nelle presenti pagine la filosofia cartesiana, ma prendere spunto da alcune riflessioni da lui fatte che tutt'oggi possono guidarci nell'arduo percorso del *Problem Solving*.

Un proverbio del Québec recita: "*I genitori danno due cose ai figli: le radici e le ali. La grandezza e il vigore delle ali dipende dalla profondità e dalla robustezza delle radici*".

In quest'ottica è corretto ricordare le nostre radici. Le odierne tecniche di *Problem Solving* non sono state tutte inventate dal nulla qualche anno fa: esse affondano sempre le loro radici nel pensiero filosofico che ha preceduto i nostri tempi e da lì traggono forza e linfa vitale.

E' anche giusto, però, che il pensiero si levi alto in cielo, mosso da ali possenti ed innovatrici. E' giusto che il volo continui instancabilmente e permetta all'uomo di esplorare orizzonti nuovi, continuando un'azione iniziata tanti secoli fa.

Lo studente è chiamato a contribuire a questo volo con il proprio pensiero. Con freschezza ed originalità. E non si nasconde che la parte più difficile del volo è proprio il momento in cui si abbandona la terra: sarà necessaria fatica e coraggio. Il premio sarà la stessa altezza del proprio pensiero ed un nuovo modo di affrontare le sfide.

1.1 René Descartes

René Descartes, italianizzato in Renato Cartesio, nacque in La Haye en Touraine (cioè nella provincia francese della Turenna) il 31 marzo 1596 e morì a Stoccolma l'11 febbraio 1650. E' stato filosofo e matematico ed è considerato il padre della matematica moderna.

Il pensiero cartesiano è finalizzato alla ricerca della verità, intesa come strumento di elevazione dell'uomo. Il percorso che conduce alla verità è, secondo Cartesio, costellato da trappole poste da quello che egli chiama il *genio maligno*, che ci fa apparire vere delle realtà che in seconda analisi non lo sono. Solo una ricerca *metodica* può aiutare l'uomo in tale impresa. In tale ottica, fra i numerosi scritti del filosofo e matematico francese, due rivestono una particolare importanza: il "Discorso sul metodo" e le "Regole per la guida dell'ingegno". Nel primo Cartesio ha esposto il *suo personale* metodo di ricerca della verità, mentre nel secondo ha teorizzato 12 regole per *guidare l'intelletto* in tale ricerca.

Figura 1.1: Cartesio nel 1649

Emerge subito un primo spunto di riflessione per lo studente: egli non deve sottrarsi all'elaborazione di un *proprio metodo personale* di ricerca/valutazione della verità, ma alimentare, *coltivando il dubbio*, una propria personale autonomia di pensiero.

Cartesio ammonisce infatti: il "Discorso sul metodo" non ha la pretesa di essere un modello per l'altrui pensiero. E' semplicemente la descrizione del *suo metodo*. Ognuno di noi è tenuto ad elaborare, con onestà intellettuale, un proprio personale metodo di ricerca della verità.

L'unico consiglio che Cartesio aggiunge è il seguente: "*Dubium sapientiae initium*". Il dubbio è l'inizio della conoscenza.

Contemporaneamente, però, Cartesio ammonisce che la ricerca della verità *deve* avvalersi di un metodo.

> "*Per l'investigazione della verità è necessario un metodo.*
>
> Cartesio - Regole per la guida dell'ingegno

ed è esattamente di questo che i presenti appunti parlano. Spesso lo studente pensa che risolvere un problema sia "opera dell'ingegno" che non obbedisce ad alcuna regola ma è puro frutto dell'intuizione. Che lo studente medio sopravvaluti il potere dell'intuizione lo si capisce facilmente durante le interrogazioni: se lo studente conosce la risposta alla domanda fatta dall'insegnante, la fornisce prontamente; se non la conosce, fornisce una risposta dettata dall'intuizione, non dal ragionamento.

Cartesio ammonisce, invece, che è necessario possedere un metodo per ricercare la verità (traduzione: risolvere un problema), in modo da non restare appiedati quando l'intuizione non viene in aiuto.

Il metodo cartesiano è incentrato su quattro concetti cardine, che verranno trattati separatamente: *evidenza*, *analisi*, *sintesi* ed *enumerazione*. A questi si aggiungeranno, quando utile, le dodici "Regole". Prima di entrare nel dettaglio, però, si sottolinea ancora che non si intende fornire una trattazione, anche se breve, del pensiero cartesiano, ma porre in evidenza alcune *radici* delle tecniche di *Problem Solving* che verranno affrontate nelle presenti pagine.

1.2 Esercizi

Gli esercizi riportati nelle seguenti pagine sono tutti relativi a quanto esposto nel capitolo 1.

1. ♢♢♦ Si legga l'opera "Regole per la guida dell'ingegno" di Cartesio. E' scaricabile dal link

   http://www.noein.net/moderno/descartes_regole.pdf

   adeguatamente introdotta da Dario Zucchello e distribuita con licenza Creative Commons BY-NC-SA.

   Si commentino le seguenti regole cartesiane tratte dalla suddetta opera:

2. ♢♢♢ Regola prima: "*Il fine degli studi deve essere quello di guidare la mente nella formulazione di giudizi sicuri e veri, intorno a tutte le cose che si presentino.*"

3. ♢♢♢ Regola seconda: "*Occorre occuparsi solo di quelle cose alla cui certa e indubitabile conoscenza la nostra intelligenza appare essere sufficiente.*"

4. ♢♢♢ Regola terza: "*Intorno agli oggetti proposti si deve ricercare non ciò che altri abbiano opinato o che noi stessi sospettiamo, ma ciò che chiaramente e evidentemente possiamo intuire o dedurre per certo; infatti la scienza non s'acquisisce in altro modo.*"

5. ♢♢♢ Regola quarta: "*Per l'investigazione della verità è necessario un metodo.*"

6. ♢♢♢ Regola quinta: "*Tutto il metodo consiste nell'ordine e disposizione di quelle cose cui deve essere diretta la forza della mente, per scoprire qualche verità. E tale metodo osserveremo esattamente, se ridurremo le proposizioni involute e oscure, un po' alla volta, a altre più semplici, e poi dall'intuizione di tutte le più semplici tenteremo d'ascendere per gli stessi gradi alla conoscenza di tutte le altre.*"

7. ♢♢♢ Regola sesta: "*Per distinguere le cose semplicissime dalle involute, e per perseguirle con ordine, è necessario in ogni serie delle cose, nella quale abbiamo dedotte direttamente alcune verità le une dalle altre, osservare che cosa sia massimamente semplice, e in che modo da ciò tutte le altre si allontanino più, o meno, o ugualmente.*"

8. ♢♢♢ Regola settima: "*Per il completamento della scienza bisogna esaminare tutte le cose e ciascuna in particolare, pertinenti al nostro obiettivo, con un moto continuo e mai interrotto del pensiero, e abbracciarle con un'enumerazione sufficiente e ordinata.*"

9. ♢♢♢ Regola ottava: "*Se nella serie delle cose da ricercare intervenga qualcosa che il nostro intelletto non sia in grado d'intuire sufficientemente bene, lì ci si deve fermare, né si devono esaminare le altre cose che seguono, ma ci si deve astenere da una fatica del tutto vana.*"

10. ◊◊◊ Regola nona: "*E' necessario rivolgere tutto il vigore dell'intelligenza alle cose minime e massimamente facili, e in quelle indugiare più a lungo, fino a quando non ci s'abitui a intuire la verità in modo distinto e perspicuo.*"

11. ◊◊◊ Regola decima: "*Perché l'intelligenza si faccia perspicace, si deve esercitare nella ricerca delle medesime cose che già sono state trovate da altri, e con metodo passare in rassegna anche gli artifici umani più insignificanti, ma in modo particolare quelli che sviluppano l'ordine o lo suppongono.*"

12. ◊◊◊ Regola undicesima: "*Dopo che abbiamo intuito un certo numero di proposizioni semplici, se da esse concludiamo qualche altra cosa, è utile percorrerle con un moto continuo e mai interrotto del pensiero, per riflettere sui loro mutui rapporti, e concepire distintamente più cose simultaneamente, per quanto è possibile: così, infatti, anche la nostra conoscenza diventa di gran lunga più certa, e aumenterà massimamente la capacità dell'intelligenza.*"

13. ◊◊◊ Regola dodicesima: "*Infine si deve far ricorso a tutti gli aiuti dell'intelletto, dell'immaginazione, del senso, e della memoria, sia per intuire le proposizioni semplici distintamente, sia per confrontare rettamente le cose ricercate con quelle già note, al fine di giungere alla loro conoscenza, sia per trovare quelle che tra loro devono essere correlate, perché nessun aspetto dell'umana capacità sia omesso.*"

14. ◊◊◊ Si rifletta sulle dodici regole cartesiane appena enunciate. Quale ha colpito di più lo studente?

15. ◊◊◊ L'applicazione immediata di quali delle suddette regole potrebbe aiutare lo studente a migliorare il proprio studio?

Capitolo 2

L'evidenza

Introducendo il primo concetto del "Metodo", Cartesio dice:

> "*La prima regola era di non accettare mai nulla per vero, senza conoscerlo evidentemente come tale*".

Per capire bene cosa il matematico e filosofo francese intendesse è bene riprendere un disegno illustrato nell'introduzione:

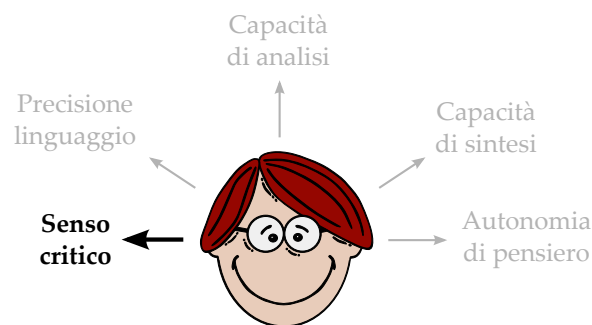



Figura 2.1: Il senso critico

Il pensiero cartesiano applicato sui banchi di scuola va tradotto. Quando lo studente legge il testo di un compito oppure delle specifiche di progetto o semplicemente delle consegne fornite dall'insegnante, queste vanno lette attentamente e con senso critico. "Con senso critico" non significa (solo) che si deve criticare ciò che si legge ma (soprattutto) ciò che si capisce. E' frequente, infatti, che lo studente mal interpreti il testo fornito e, di conseguenza, mal svolga il compito assegnato.

La lettura critica del testo mira quindi, non solo a verificare che esso sia privo di ambiguità o contraddizioni, ma anche e soprattutto alla sua corretta e profonda comprensione.

2.1 La velocità del ciclista

Si cercherà di spiegare meglio tale concetto attraverso il seguente enunciato/esercizio:

Esercizio - ◊◊♦ Velocità media

"Un ciclista percorre una salita alla velocità costante v_1 di 10Km/h e ripercorre la stessa strada in discesa alla velocità costante v_2 di 30Km/h. Quindi la velocità media del tragitto percorso è di 20Km/h". Si applichi la prima regola del metodo cartesiano al suddetto testo.

Soluzione

L'attenzione va subito all'ultima frase, che dice che la velocità media è di 20Km/h e molti studenti sostengono che ciò sia vero. Tutto sommato non è nemmeno così importante verificare se la risposta è esatta o meno. E' molto più importante stabilire *come* si sia arrivati a tale conclusione. Si è utilizzato un processo logico rigoroso oppure la risposta è stata *intuitiva*?

Nel secondo caso potrebbe essere utile rileggere il pensiero di Cartesio che campeggia all'inizio della presente sezione oppure dare un'occhiata alla lapidaria frase formulata nelle "Regole":

> "*È molto meglio non pensare mai a alcuna ricerca della verità, che farlo senza metodo.*
>
> Cartesio - Regole per la guida dell'ingegno

Qualche studente potrebbe pensare, seccato: "Eccone un altro che mortifica la mia fantasia ed il mio intuito!". Per nulla. Volendo proporre una similitudine, l'intuito e la fantasia potrebbero essere paragonati al fantasista di una squadra di calcio, capace di fare un lancio millimetrico di 30 metri e tagliare fuori la difesa avversaria. Ma a ricevere il lancio ci deve essere un attaccante dalle spalle larghe e dai piedi buoni che calcia la palla in rete, altrimenti è tutto inutile. Quell'attaccante, nella nostra similitudine, è la ragione/conoscenza, che si nutre del dubbio, è vero, ma che non disdegna nemmeno i colpi d'ala della fantasia e dell'intuizione.

L'importante è che, dopo l'intervento dell'intuizione, la palla passi alla ragione. Anche Cartesio era d'accordo in tal senso:

> "*Enumeriamo qui tutti gli atti del nostro intelletto, attraverso i quali possiamo giungere alla conoscenza delle cose senza tema di errore: due soltanto gli atti ammessi, l'intuito e la deduzione*."
>
> Cartesio - Regole per la guida dell'ingegno

Tornando al nostro problema, l'allievo, se sollecitato ad indicare *perché* ritenga che il testo non contenga errori, solitamente risponde che

$$v_m = \frac{10+30}{2} = 20Km/h \tag{2.1}$$

facendo in tal modo il primo calcolo che gli viene in mente. Ma si tratta, solitamente, solo del *primo* calcolo che è venuto in mente allo studente, non il

più giusto. Così facendo ha calcolato la media delle velocità. Ma è corretto calcolare la media delle velocità? La media delle velocità equivale alla velocità media? Quegli studenti che hanno risposto subito a questi interrogativi farebbero bene a rileggere nuovamente il pensiero di Cartesio, indipendentemente dall'esattezza delle risposte fornite.

Quegli allievi che, invece, non si sono fatti tentare da un risposta facile ed immediata, forse hanno preso in mano carta e penna ed hanno iniziato a considerare solo le verità *evidenti*. Ma quali sono le verità evidenti? Quelle che, secondo Cartesio, vengono elaborate secondo un modello assiomatico e rigore scientifico. Lo studente può, quindi, rivolgersi con fiducia alla matematica e alla fisica.[1]

Non solo, sperando che Cartesio non si arrabbi troppo[2], può anche utilizzare (sempre con senso critico, però) il lavoro fatto dai grandi pensatori che ci hanno preceduti, soprattutto quelli che si sono posti al servizio delle scienze assiomatiche, la matematica *in primis*.

Forti di tali premesse possiamo quindi scrivere che:

$$v_{media} = \frac{spazio}{tempo} \tag{2.2}$$

ovvero che la velocità media è data dal rapporto fra lo spazio[3] percorso ed il tempo impiegato per percorrerlo. Siccome abbiamo appena enunciato una verità, dobbiamo chiederci se essa è assolutamente vera.

La 2.2 è null'altro che la legge oraria che regola il moto rettilineo uniforme. L'abbiamo studiata a scuola, è stata soppesata e validata da studiosi come Newton, lo stesso Cartesio, Einstein, Feynman e molti altri, per cui possiamo dirci in buona compagnia se sosteniamo la veridicità della 2.2. Attenzione però: le leggi che i Grandi della Scienza ci hanno tramandato non vanno imparate, ma studiate con senso critico.

C'è, però, un problema. Della 2.2 non conosciamo nè lo spazio nè il tempo impiegato per percorrerlo. Cosa possiamo aggiungere di *evidente* ai dati del nostro problema?

Un'evidenza euclidea[4] è data dal fatto che se il tragitto in salita $\overline{AB}$ vale s, anche il tragitto in discesa $\overline{BA}$ è lungo s. Quindi la 2.2 può essere riscritta nel seguente modo:

$$v_{media} = \frac{2s}{tempo} \tag{2.3}$$

Inoltre, sempre in virtù della 2.2 possiamo scrivere:

$$\Delta t_1 = \frac{s}{v_1} \tag{2.4}$$

[1] Cartesio, a proposito della fisica, avrebbe probabilmente aggiunto:"*Ma con prudenza*"

[2] Cartesio sosteneva che una delle regole fondamentali del suo metodo consisteva nel ricostruire il sapere dalle fondamenta e che tale lavoro di rifondazione dovesse essere frutto di una persona sola. Aggiunge, però, anche che "si devono leggere i libri degli Antichi, dal momento che è un notevole beneficio che noi si possa utilizzare le fatiche di tanti uomini."

[3] Lo studente avrà capito dal contesto che non si considerano in questo caso la velocità e lo spazio come grandezze vettoriali ma semplicemente come grandezze scalari. Non solo: si considerano acquisiti i concetti di spazio e tempo, per brevità di esposizione. Lo studente pignolo (bravo!) potrà consultare HALLIDAY, RESNICK, WALKER [4] per riflessoni su spazio e tempo oppure può consultare l'olimpo: FEYNMAN [2].

[4] Considerando un sistema di assi cartesiani la cui ascissa sia parallela al segmento di retta $\overline{AB}$ si può scrivere che $s = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$.

e

$$\Delta t_2 = \frac{s}{v_2} \tag{2.5}$$

dove Δt_1 e Δt_2 sono rispettivamente il tempo necessario per percorrere la salita alla velocità v_1 ed il tempo necessario per percorrere la discesa alla velocità v_2. Quindi la 2.3 può essere riscritta nel seguente modo:

$$v_{media} = \frac{2s}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \tag{2.6}$$

e per sostituzione si ha:

$$v_{media} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} \tag{2.7}$$

Calcolando il *mcm* si ottiene

$$v_{media} = \frac{2s}{\frac{sv_2+sv_1}{v_1v_2}} \tag{2.8}$$

e raccogliendo s a denominatore e semplificando col numeratore si ottiene la relazione definitiva

$$v_{media} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 30}{10+30} = 15Km/h \tag{2.9}$$

L'enunciato formulato nel problema, ossia che la velocità media fosse di 20Km/h, è quindi falso! Come siamo giunti a questa conclusione? Partendo da verità evidenti o "studiate a scuola" (quindi elaborate secondo criteri rigorosi e assiomatici) ed aggiungendo dei "ragionamenti" via via più articolati ma sempre consequenziali fra loro.

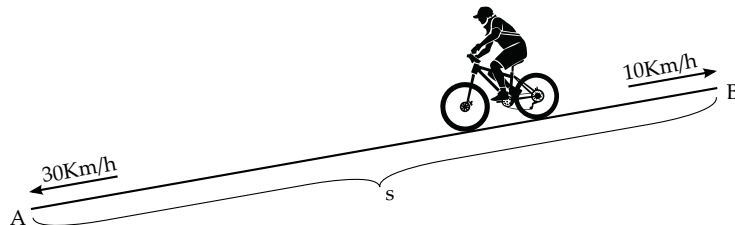



Figura 2.2: Velocità media del ciclista

Lo studente potrebbe obiettare che anche il calcolo fatto in 2.1 a pagina 8 è corretto. E' corretto il calcolo ma non il ragionamento che lo sorregge. Se sommo i mesi dell'anno ai secondi che formano un minuto ottengo 72, ma quale sia la logica che mi abbia indotto a fare una simile somma non è dato sapere. L'equazione 2.1 a pagina 8 rappresenta *la media delle velocità, non la velocità media!*

Questo semplice esercizio ha una pretesa molto alta: far capire allo studente l'importanza del dubbio e di un approccio rigoroso ai problemi dati. Se lo studente un po' impulsivo farà tesoro di quanto esposto in queste pagine, farà anche un enorme passo in avanti nella sua crescita personale ed avrà aggiunto un mattone fondamentale alla costruzione del suo *saper essere*.

Attenzione, però. Non è così raro trovare persone disposte a dubitare delle altrui verità, molto più raro è trovare persone capaci di mettere in dubbio le *proprie verità*. Tutti noi siamo solitamente piuttosto affezionati alle nostre idee e ai nostri princìpi e poco inclini a metterli in dubbio. La difficoltà consiste proprio nel saper dubitare, anche e soprattutto, delle proprie intuizioni.

2.1.1 Commento all'esercizio

La media delle velocità è la velocità media? Adesso è evidente a tutti: certamente no. Ma più di ciò, l'esercizio ha voluto porre in evidenza quanto dannoso possa essere un vizio molto diffuso fra gli studenti: rispondere "a intuito". E siccome l'intuito viene applicato nella prima fase di risoluzione del problema, ovvero l'evidenza, produce il massimo danno, perché annulla l'analisi e rende totalmente inutile la sintesi. Sull'enumerazione stendiamo ovviamente un velo pietoso.

Come andrebbe affrontato un esercizio simile? E' la stessa domanda che indica la strada da seguire: "Si applichi la prima regola del metodo cartesiano al suddetto testo" (si valuti, cioè, se la velocità media sia effettivamente di 20km/h). Si chiede di accertare la veridicità di un'affermazione. E Cartesio chiede proprio di "non accettare mai nulla per vero, senza conoscerlo evidentemente come tale".

Quindi l'atteggiamento giusto è un atteggiamento critico, vigile e attento e che mira ad accertare e non a rispondere intuitivamente. Un allievo che si pone criticamente di fronte ad un tale esercizio si pone una ed una sola domanda: "Cos'è la velocità media?" Dato uno spazio S percorso rettilineamente a velocità variabile in un tempo T, la velocità media è quella *velocità costante* V che permette di coprire lo spazio S nel tempo T. Se così non fosse tutta la fatica fatta per studiare il moto rettilineo uniforme sarebbe stata vana.

Un simile atteggiamento è assolutamente pragmatico e strettamente osservante della teoria studiata ed è alla base della 2.2 a pagina 9. Da detta relazione alla 2.3 il passo è stato breve e quasi ovvio. Anche tutti i successivi passaggi sono praticamente obbligati e nessuna concessione fanno alla fantasia.

Qualche studente potrebbe trovare la risposta non soddisfacente, o meglio, insufficiente. In effetti alla base della soluzione c'è anche un altro aspetto che non è molto amato fra gli studenti: il calcolo letterale. Molti studenti sostituiscono i numeri ai simboli appena possibile, commettendo almeno due errori piuttosto gravi: tolgono formalismo al calcolo e impediscono il controllo dimensionale dello stesso. Lo studente abituato a sostituire subito i numeri ai simboli, si trova spiazzato quando non ha "abbastanza numeri" da porre nei calcoli.

Invece, spesso, il calcolo letterale, oltre ad essere più elegante e più sicuro è più "teorico". Obbliga lo studente a riflettere di più senza delegare il calcolo alla calcolatrice, ma mantenendo il controllo della risoluzione. Inoltre, il calcolo letterale non è una successione meccanica di operazioni algebriche, ma richiede un minimo di "strategia" e di ragionamento che sono entrambi in piena armonia col pensiero cartesiano.

2.2 La fine della matematica?

Anche al fine di non essere troppo pedanti, si vuole proporre un secondo esercizio, un po' scherzoso.

Esercizio - ◊◊◊ 1 = 2

Si esaminimo i seguenti passaggi matematici e si trovi l'errore (ammesso che ci sia ☺):

$$1 = 1^2 \tag{2.10}$$
$$1 - 1 = 1^2 - 1^2 \tag{2.11}$$
$$1 - 1 = (1 - 1)(1 + 1) \tag{2.12}$$
$$\cancel{1 - 1} = \cancel{(1 - 1)}(1 + 1) \tag{2.13}$$
$$1 = 2 \tag{2.14}$$

Soluzione

Se non dovessero esserci errori nei suddetti passaggi potremmo ufficialmente smettere di studiare la matematica e dedicarci alla contemplazione delle tazzine per mancini, attività che sarebbe senz'altro più utile.

Ovviamente anche il più sprovveduto degli studenti ha il sospetto che ci sia il trucco e molti lo avranno anche individuato. Si noti, però, che l'autore non chiede un'opinione allo studente, ma il teorema, principio, lemma, corollario (e chi più ne ha, più ne metta) dell'algebra che non è stato osservato scrupolosamente.

Lo studente non risponda quindi fornendo opinioni personali, punti di vista esoterici o congiunzioni astrali incipienti, ma risponda in maniera matematica ad una domanda di natura matematica.

Prima di procedere si desidera tranquillizzare il lettore: non si chiedono dimostrazioni matematiche da Algebra II, ma semplici riferimenti algebrici studiati al biennio della scuola superiore.

L'equivalenza 2.10 è corretta. L'elemento 1 è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione negli insiemi[5] $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ (che denoteremo, in generale, con l'insieme M) e soddisfa la proprietà

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n \quad \forall n \in M \tag{2.15}$$

Siccome la 2.15 vale per $\forall n \in M$, vale anche per l'elemento 1, quindi

$$1 \cdot 1 = 1^2 = 1 \tag{2.16}$$

Diretta conseguenza della 2.16 è la 2.11, che quindi è corretta anch'essa. Il passaggio seguente è la pedissequa applicazione di uno dei primi prodotti notevoli che si studiano a scuola, ovvero della differenza di quadrati (o "somma per differenza" come a volte è chiamato), secondo la quale

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \forall a, b \in M \tag{2.17}$$

[5]Usando una terminologia corretta dovremmo dire "monoidi", ma se diremo che l'elemento 1 è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione negli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, troveremo sicuramente il perdono di qualche insegnante di matematica.

e quindi anche nel caso in cui $a = b = 1$.

Quindi è assai probabile che il passaggio infame sia il 2.13. Ma dove sta l'errore? In fin dei conti entrambi i membri della 2.13 sono stati divisi per il fattore $(1 - 1)$ in ossequio al II principio di equivalen...

Il II principio di equivalenza! Probabilmente anche quell'unico studente che non aveva ancora trovato l'errore si sarà messo una mano sulla fronte. Il II principio di equivalenza recita:

> *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

Non nulla! Ecco le parole magiche. L'espressione usata per dividere ambo i membri è nulla, dato che $1 - 1 = 0$ e quindi non può essere usata per semplificare la 2.13. La matematica è salva!

2.2.1 Commento all'esercizio

Beh, forse i toni usati nell'esercizio erano più appropriati ad un circo equestre che ad un esercizio di matematica, ma il concetto dovrebbe essere chiaro: il testo di un problema o di una consegna deve essere affrontato con grande serietà e possibilmente con profondità di pensiero. La superficialità nella lettura del testo apre le porte all'errore. Può darsi che qualche allievo abbia una certa propensione a "sparare a caso" (ancora!) quando non conosce la risposta alla domanda dell'insegnante, ma si tratta di un'abitudine da abbandonare immediatamente. Innanzi tutto perché statisticamente la probabilità di azzeccare la risposta giusta è molto bassa (lo studente medio è molto fantozziano: riesce a sbagliare anche quando la probabilità è del 50%) ma soprattutto per un altro, molto più valido, motivo. Perché non c'è progresso e non c'è aumento della conoscenza. Se lo studente affinasse la propria tecnica di "sparare a caso" e aumentasse negli anni la probabilità di dare la risposta esatta, l'insegnante avrebbe certamente un problema in più se volesse sconsigliare l'allievo nel perseverare in tale pratica. Ma ciò è falso. Ogni volta che l'allievo tenta la sorte non può fare esperienza dei tentativi precedenti (a meno che la domanda non venga ripetuta).

Lo studente, solitamente, obietta che non "spara a caso", ma che ha delle intelligentissime intuizioni. Ovviamente le intuizioni sono sempre benvenute, anche da Cartesio. Però non sono sufficienti. Prima di diventare qualcosa di diverso di una "risposta data a caso" devono ricevere l'avvallo della ragione: solo lei può trasformare un'intuizione in una risposta corretta. Quindi quando lo studente ha un'illuminante intuizione, deve prendersi del tempo e ragionarci sopra, finché essa non sia pienamente confermata dalla ragione.

Qualche volta lo studente reagisce dicendo che il proprio insegnante non lascia il tempo per pensare. Naturalmente dipende dal tipo di domanda. Se la domanda è banale la risposta non dovrebbe tardare eccessivamente, perché lascia presupporre mancanza di studio da parte dell'allievo. Ma se la domanda è un po' più complessa lo studente ha tutto il diritto di pensare prima di rispondere. Se teme che il professore sia troppo impaziente può "esporre" ad alta voce i ragionamenti che fa: sentire uno studente che esprime i propri ragionamenti fa sempre piacere.

2.3 Un cambio di base fastidioso

Anche in questa sezione si propone un esercizio avente lo scopo di mantenere vigile l'attenzione dello studente e invogliarlo ad una lettura critica del testo.

In Informatica i numeri sono sempre stati un problema. Gli "insiemi" numerici in Informatica (chiamati *tipi* in molti linguaggi di programmazione) sono portatori, principalmente, di due difetti: non sono infiniti e non sono un granché precisi. Non si tratta di una novità e i tecnici del settore ormai se ne sono fatti una ragione. Ben diverso sarebbe se, ad esempio, la mancanza di precisione si scoprisse in campo matematico. A tal proposito si veda il seguente esempio, un po' meno scherzoso del precedente, dato che ha notevoli implicazioni nel calcolo in virgola mobile, ma ugualmente istruttivo.

Esercizio - ◊◊♦ Cambio di base

Si supponga di voler rappresentare il numero (in base decimale) 4/5 (ovvero 0.8) in base 2. Che numero si ottiene?

Soluzione

La domanda, francamente, sembra piuttosto innocua. In forma polinomiale, la parte intera del numero si esprime mediante somma di potenze a esponente positivo, ottenibili mediante ripetute divisioni per due, mentre la parte decimale mediante somma di potenze a esponente negativo, ottenibili mediante ripetute moltiplicazioni per due. Essendo la parte intera pari a zero, non serve alcuna conversione, mentre convertendo la parte decimale si ottiene:

$$\begin{array}{r|l} 0.8 \cdot 2 = 1.6 & 1 \\ 0.6 \cdot 2 = 1.2 & 1 \\ 0.2 \cdot 2 = 0.4 & 0 \\ 0.4 \cdot 2 = 0.8 & 0 \\ 0.8 \cdot 2 = 1.6 & 1 \\ 0.6 \cdot 2 = 1.2 & 1 \\ 0.2 \cdot 2 = 0.4 & 0 \\ 0.4 \cdot 2 = 0.8 & 0 \\ ... & ... \end{array}$$

che trascritto in forma polinomiale diventa

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-9} + 2^{-10} + 2^{-13} + 2^{-14} + 2^{-17} + 2^{-18} + ...$$

ovvero

$$0.8_{10} = 0.\overline{1100}_2 \tag{2.18}$$

che è un numero periodico!

Riassumendo: 0.8, espresso in base 10, è un numero razionale non periodico, ma se viene convertito in base due diventa un numero periodico. Quindi, se riconvertito si ottiene

$$0.7999999999999999... \tag{2.19}$$

Quindi 0.8 dopo due conversioni è diventato $0.7\overline{9}$. Dove sta il trucco?

◊◊◊

Il trucco non c'è proprio. E' tutto vero e non ci sono errori. Lo studente può controllare e ricontrollare tutti i passaggi fatti e non troverà errori di alcun tipo. Non solo: facendo vedere i calcoli ad un insegnante di Matematica, quest'ultimo confermerebbe senz'altro la correttezza di ciascun passaggio ma, soprattutto, con ogni probabilità non capirebbe dove sta il problema.

Infatti non c'è nessun problema. Le tre notazioni 0.8_{10}, $0.7\overline{9}_{10}$ e $0.\overline{1100}_2$ rappresentano lo stesso identico numero: $4/5$ o, se si preferisce, 0.8.

Infatti 0.8 e $0.7\overline{9}$ non sono due numeri molto molto simili: sono lo stesso identico numero. Di fronte a una tale affermazione lo studente tipo reagisce in due distinti modi:

1. ah, va bene;
2. uhmm.

Il primo studente accetta la versione offerta dall'insegnante senza chiedere (e senza chiedersi) perché. Il secondo non si accontenta della spiegazione fornita dall'insegnante e ci pensa su.

Il secondo allievo sarà soddisfatto quando troverà (o gli verrà offerta) la prova di quanto l'insegnante ha detto.

2.3.1 I numeri periodici

E se 0.8 non fosse uguale a $0.7\overline{9}$? E se l'insegnante non l'avesse raccontata giusta? Se ne sentono tante al telegiornale!

E' giusto e sacrosanto non accontentarsi di una spiegazione superficiale. A volte l'insegnante è in grado di illuminare le menti, a volte no. Non è quello il problema. Il problema è che non ci si deve accontentare di una mezza spiegazione e se l'insegnante non è in grado di rispondere ci deve pensare l'allievo (sarebbe meglio che ci pensassero entrambi!).

Nel caso particolare, ovvero se un numero periodico sia uguale ad un determinato numero razionale non periodico, i matematici si sono espressi in decine, forse centinaia, di forme diverse, naturalmente concordanti, ma a livelli di profondità diverse. La "spiegazione" che si vuole offrire nelle presenti pagine è ovviamente di livello scolastico, quindi piuttosto semplice.

Si supponga che

$$x = 0.7999999999999999...$$

quindi

$$\begin{aligned} 100x &= 79.99999999999999... \\ 10x &= 7.999999999999999... \end{aligned}$$

per cui si può scrivere che

$$\begin{aligned} 100x - 10x &= 79.99999999999999... - 7.999999999999999... \\ 90x &= 72 \\ x &= \frac{72}{90} = 0.8 \\ 0.8 &= 0.7999999999999999... \end{aligned} \tag{2.20}$$

Nell'ultimo passaggio la 2.20 esprime senza ambiguità la perfetta equivalenza dei due numeri. Quindi il "problema" è risolto (anche perché non c'è mai stato).

2.3.2 Commento all'esercizio

Statisticamente lo studente non ama i cambi di base. Quando è costretto a farlo, impara a memoria alcune procedure che lo aiutano a convertire un numero da una base all'altra. In realtà, l'allievo conosce il sistema numerico in base due molto meglio di quanto non immagini. Deve semplicemente tenere a mente che cambiando base numerica tutto l'impianto matematico che ha studiato rimane inalterato. Quindi se un numero è razionale in base 10, deve esserlo anche in base 2. E' certamente possibile che la relazione 2.20 sia controintuitiva ma, non ci si stancherà mai di ripeterlo, non deve essere questo il metro che ci guida nella risoluzione dei problemi. L'unica guida sicura è data dalle certezze matematiche e fisiche che si sono imparate a scuola.

Si ammette che i passaggi matematici che conducono alla 2.20 possono non essere immediati per uno studente,[6] ma ciò non deve essere sufficiente per irrobustire la pratica della risposta intuitiva ad ogni costo.

Il presente esercizio mostra in tutta evidenza la necessità di un senso critico sempre vigile e attento. E' perfettamente comprensibile che l'allievo non sia sempre in grado di fornire risposte esaurienti e logiche ai dubbi emersi, ma deve essere chiarissimo che non è questo ciò che viene attualmente chiesto allo studente: per il momento gli viene chiesto di esercitare il proprio senso critico, non ancora di fornire risposte corrette ad ogni domanda. Quest'ultimo è un processo lento che mostrerà i primi frutti forse alla fine del terzo corso. Poi ci saranno altri frutti da raccogliere alla fine del quarto corso e così via, passando lentamente da un piccolo miglioramento all'altro.

2.4 Carta nera, carta bianca

Il seguente esercizio è di relativa facilità per chi conosce i rudimenti del calcolo probabilistico, ma è agevolmente affrontabile anche da chi ne è a digiuno. Si tratta di di un quesito piutosto semplice che lo studente farebbe bene ad affrontare secondo quanto raccomandato per l'intero capitolo.

Esercizio - ◊◊◊ Calcola la probabilità

Si suppongano tre carte: una nera da ambo i lati; una bianca da ambo i lati ed una nera da un lato e bianca dall'altro. Si prenda una carta a caso e, senza analizzarla, la si ponga sul tavolo. Se si scopre che la parte visibile della carta è nera, qual è la probabilità cha anche il lato nascosto della carta sia nero?

Soluzione

Stavolta la soluzione è veramente facile. Il quesito è formulato in maniera semplice e piana e dal punto di vista logico/matematico non presenta difficoltà insormontabili, per cui si invita lo studente ad uno sforzo autonomo. L'allievo cerchi di frenare, quindi, l'impulso a girare pagina per leggere comodamente la soluzione: si metta in gioco, preventivando anche la possibilità di non risolvere brillantemente l'esercizio, ma avendoci provato con serietà e impegno.

[6] Comunque lo studente avrebbe dovuto ricordarsi dell'algoritmo di calcolo della frazione generatrice dei numeri periodici, o perlomeno essere indotto a cercarla sui libri di scuola o in rete. Mediante la definizione di una frazione generatrice si sarebbe giunti alle medesime conclusioni.

Lo studente che padroneggia i rudimenti della probabilità avrà risolto il quesito agevolmente. A dire il vero, avrebbe dovuto farlo anche lo studente totalmente a digiuno di tale branca della matematica. Comunque, l'importante è che la soluzione non sia stata frutto della sola intuizione, ma che sia stata adeguatamente filtrata dalla ragione.

I casi possibili sono talmente pochi che è agevole elencarli tutti ed eseguire un'analisi puramente combinatoria. Essi sono:

#	Lato visibile	Lato nascosto	Descrizione
1	Nero	Nero	Lato A visibile e lato B nascosto
2	Nero	Nero	Lato B visibile e lato A nascosto
3	Nero	Bianco	Lato A visibile e lato B nascosto
4	Bianco	Nero	Lato B visibile e lato A nascosto
5	Bianco	Bianco	Lato A visibile e lato B nascosto
6	Bianco	Bianco	Lato B visibile e lato A nascosto

Tabella 2.1: Elenco dei possibili casi delle tre carte

Gli ultimi tre casi (4, 5 e 6) non ci interessano perché evidenziano tre casi in cui il lato visibile della carta appoggiata sul tavolo è bianco.

I primi tre casi sono, invece, quelli riferiti al quesito presente: la carta appoggiata sul tavolo ha il lato nero visibile. Esistono quindi tre casi distinti:

1. il lato A della carta è visibile ed è nero come pure il lato B della carta, quello nascosto, è pure esso nero;
2. la carta è la stessa (nero/nero) ma stavolta il lato B è visibile e il lato A è nascosto;
3. la carta sul tavolo, stavolta, è quella metà bianca e metà nera, con il lato nero (A) visibile.

E' quindi evidente che quando il lato visibile della carta è nero, due casi su tre sono relativi all'evento che anche la parte nascosta sia nera. La probabilità è quindi del 67%. Qualsiasi altra risposta è da ritenersi quindi errata. Naturalmente la spiegazione offerta è di natura strettamente combinatoria e poco "probabilistica": tale scelta è stata fatta per non mettere in difficoltà quegli allievi che non sono ferratissimi nel calcolo delle probabilità.

Il presente problema è simile, anche se molto più facile, al famoso problema di Monty Hall, dallo pseudonimo del conduttore televisivo del gioco a premi americano "Let's Make a Deal". Dal punto di vista matematico ebbe una notevole popolarità negli anni '90 a causa della scrittrice americana Marilyn vos Savant (famosa per avere un QI altissimo) che pubblicò una dissertazione logico/probabilistica sulla rivista Parade. La dissertazione non venne capita da molti accademici, ma si rivelò essere esatta in seguito alle spiegazioni aggiuntive fornite dalla vos Savant.

Questo breve *excursus* è servito a spiegare che anche illustri accademici possono prendere abbagli clamorosi, quando a prevalere sono la fretta e il pregiudizio. Lo studente deve invece ricordare che la fretta e la superficialità sono pessime consigliere e le principali fautrici degli errori più clamorosi.

2.4.1 Commento all'esercizio

Stavolta bastava elencare tutti i possibili eventi e analizzarli uno ad uno. Chi non l'ha fatto e non è pervenuto ad una soluzione ragionata deve, però, perlomeno ammettere che le soluzioni presentate sono sempre di una relativa facilità. Perché qualche studente non trova la soluzione? Il più delle volte perché pensa in termini di "compito in classe",[7] per cui un problema deve essere risolvibile in un tempo pari a quello normalmente dedicato al triste rito. Chi pensa così compie un errore di prospettiva. Ammesso che tutto debba essere riportato al mondo della scuola (ma non è assolutamente detto che debba essere così), riuscire a risolvere i problemi dati in una-due ore rappresenta il traguardo, non la partenza. Lo studente scrupoloso arriverà a tale traguardo alla fine dei tre corsi, non all'inizio del primo. Inoltre, non è per nulla detto che i problemi indicati debbano essere risolti nel tempo testé menzionato. E, comunque, non è questa la finalità: si vuole trasmettere un metodo, non un risultato. I risultati si avvicineranno pian piano, con lo studio e con l'esercizio.

2.5 Concludendo sull'evidenza

Cartesio nel "Discorso sul metodo" scrisse a proposito dell'evidenza:

> "*[..] Bisognava, dunque, che io cercassi un altro metodo, il quale, riunendo i vantaggi di questi tre* [il metodo filosofico, quello logico e quello matematico, più precisamente l'analisi geometrica e l'algebra, NdA], *fosse esente dai loro difetti. E come la moltitudine delle leggi fornisce spesso una scusa all'ignoranza e al vizio, per cui uno Stato è tanto meglio regolato quanto meno ne ha, ma rigorosamente osservate; così, invece di quel gran numero di regole di cui la logica è composta, pensai che ne avrei avuto abbastanza di queste quattro* [le quattro regole del 'metodo', NdA], *purché prendessi la ferma e costante risoluzione di non venir meno neppure una volta alla loro osservanza.*
>
> *La prima era di* ***non accogliere mai nulla per vero che non conoscessi esser tale con evidenza****: di evitare, cioè, accuratamente la precipitazione e la prevenzione; e di non comprendere nei miei giudizi nulla di più di quello che si presentava così chiaramente e distintamente alla mia intelligenza da escludere ogni possibilità di dubbio.*"

Non serve aggiungere altro. Lo studente è invitato a non prendere mai nulla per vero che non sia evidente e a fuggire dalla precipitazione e dal pregiudizio. Sono ammonimenti immortali, anche dopo 400 anni.

[7] Occhio! Se vi siete ridotti a questo, vuol dire che la scuola vi ha rovinati ben bene. Urge cambiare immediatamente punto di vista.

2.6 Esercizi

Gli esercizi riportati nelle seguenti pagine sono tutti relativi a quanto esposto nel capitolo 2.

1. ◊◊◊ Quali frasi o enunciati letti nelle presenti pagine ti sono parsi poco chiari?

2. ◊◊◊ Prova a modificarli rendendoli più chiari. Poi spedisci le modifiche al seguente indirizzo

   bandiziol@katamail.com

   con titolo dell'oggetto: "Correzioni proposte a 'Problem Solving Strategies" specificando la versione del documento e la pagina ove compare il testo da modificare. Se la modifica verrà attuata, lo studente verrà citato esplicitamente nelle future edizioni.

3. ◊◊◊ Lo studente valuti criticamente se l'abitudine di rispondere in maniera intuitiva gli appartiene o meno.

4. ◊♦♦ Se la risposta all'esercizio precedente è stata affermativa, lo studente pianifichi una strategia per abbandonare la suddetta cattiva abitudine. Il presente è sicuramente fra gli esercizi più difficili proposti nelle presenti pagine.

5. ◊◊♦ Lo studente legga il "Discorso sul Metodo" di Cartesio. Indicazioni su una libera lettura sono date in sitografia.

Capitolo 3

L'analisi

Il secondo concetto che Cartesio usa nel suo "Metodo" è da lui così enunciato:

> "*La seconda* [regola, NdA] *era di dividere ogni problema preso a studiare in tante parti minori, quante fosse possibile e necessario per meglio risolverlo*."

Divide et impera. Praticamente Cartesio aveva elaborato l'algoritmo del *Quick Sort* già nel 1637!

La strategia di suddividere un problema grande e difficile da affrontare tutto in una volta in tanti piccoli problemi più facili da superare singolarmente è quindi piuttosto vecchia.

Si tratta di una strategia utilizzata in molti campi anche se viene di volta in volta chiamata in modo diverso: è usata in Informatica (ricorsione), in Matematica (induzione), in Elettronica (schema a blocchi), ecc.

Il fine, però, è sempre lo stesso: suddividere un problema grande e complesso in tanti problemi più piccoli e più semplici, dopodiché risolvere uno alla volta i problemi più semplici. Non si tratta di un'azione semplice: si matura una siffatta capacità con il tempo e con l'esercizio. Lo studente non si scoraggi, quindi, se questa sezione gli appare piuttosto complessa e di difficile attuazione. E' però fondamentale esercitarsi fin da subito in questa complessa arte anche e proprio perché è difficile.

Si narra che il padre del Judo, Jigorō Kanō, abbia elencato le 40 tecniche fondamentali dell'arte marziale ponendo al primo posto il *De-ashi-barai*, considerata la più difficile. Quando gli venne chiesto perché la prima tecnica da studiare fosse proprio la più difficile, rispose che doveva esserlo, dato che era quella che richiedeva più tempo per essere acquisita.

Il paragone con il presente capitolo è fin troppo evidente.

La capacità di cui si vuole parlare nel presente capitolo è la capacità di analisi. La terza delle cinque capacità di cui si è parlato nell'introduzione.

La capacità di analisi non è un dono che si riceve alla nascita. E' un processo continuo di apprendimento che si affina (se è stato correttamente impostato) con il tempo e con l'esercizio. Non ha nulla di magico o di trascendentale: dietro una buona capacità di analisi, solitamente, c'è *solo* tanto lavoro e tanto esercizio.

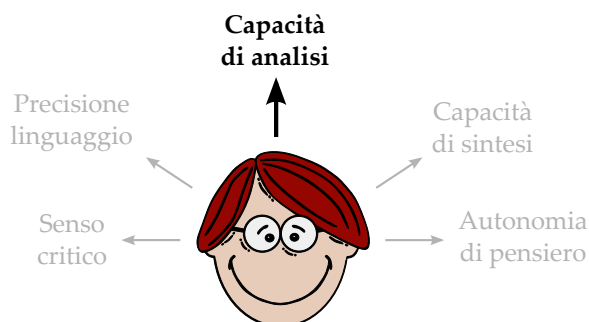



Figura 3.1: La capacità di analisi

Quello che potrebbe effettivamente mettere in difficoltà lo studente è la necessità di abbandonare (forse) alcune abitudini per abbracciarne delle altre, di cui non si conosce l'effettiva efficacia. Solitamente, infatti, la gente è restìa ad abbandonare la strada vecchia per quella nuova, per ovvi motivi di saggezza popolare e di rima.[1] Lo studente che, invece, è poco avezzo a ragionare e a procedere con metodo, ma si affida al più comodo ed istintuale intuito, ha solitamente difficoltà a cambiare approccio. In generale, la tecnica che si utilizzerà per affrontare o, meglio, analizzare un problema, è quella di suddividerlo in sottoproblemi più facili da affrontare separatamente. La difficoltà consiste proprio nella suddivisione, che non è sempre agevole né immediata. Si tratta, però, di una tecnica da perseguire e da utilizzare appena possibile anche se non è facilmente codificabile. Questo approccio, chiamato frequentemente "divide et impera" si articola in tre fasi sostanziali:

- ***divide***: è la fase di suddivisione del problema;
- ***impera***: è la fase di risoluzione delle singole parti ottenute nella fase precedente;
- ***combina***: è la fase in cui si ricompongono le varie soluzioni in un'unica soluzione del problema.

"Insegnare" queste tre fasi è esercizio piuttosto sterile, E' molto più utile affrontare dei problemi specifici cercando di utilizzare un metodo che permetta di risolvere man mano piccoli problemi. Come si vedrà nella prossima sezione, affrontare un problema senza suddividerlo, implica semplicemente l'impossibilità di risolverlo. Se qualche studente non ci crede potrà tentare di risolvere il problema della sezione 3.1 senza suddividerlo: tanti auguri. Se invece ogni singolo passo verrà analizzato, discusso e singolarmente risolto, pian piano il problema diventerà sempre più semplice, fino a scomparire.

[1] I motivi che frenano lo studente ad abbandonare le vecchie (cattive) abitudini per abbracciare quelle nuove (virtuose), sembrano essere tutt'altro che banali. Si veda a tal proposito l'articolo "Buone abitudini, cattive abitudini" di Ann M. Graybiel e Kyle S. Smith, apparso su "Le Scienze" dell'agosto 2014.

3.1 I vicini di casa

Nella presente sezione verrà presentato un classico rompicapo, non semplicissimo, da "analizzare". E' attribuito ad Albert Einstein, anche se ci sono dei dubbi sulla effettiva paternità, come riportato nella rubrica "Rudi Matematici" del numero di giugno 2010 de "Le Scienze". Nonostante ciò, nel prosieguo dell'esercizio, per semplicità, ci si riferirà ad esso come al "problema di Einstein".

La difficoltà del rompicapo, comunque, rimane inalterata, come si evince dal prossimo

Esercizio - ◊♦♦ I vicini di Einstein

Cinque ville a schiera, tutte di colore diverso e una a fianco dell'altra, sono abitate da altrettanti inquilini di nazionalità diversa. Ogni inquilino ha la sua bevanda preferita, la sua marca di sigarette preferita ed ha un animale domestico. Si sa che:

1. L'inglese vive nella casa rossa.
2. Lo svedese ha un cane.
3. Il danese beve té.
4. La casa verde è immediatamente alla sinistra di quella bianca.
5. Chi vive nella casa verde beve caffè.
6. Chi fuma le Brontolo[2] ha un canarino
7. Chi vive nella casa gialla fuma le Pisolo.
8. Chi vive nella casa centrale beve latte.
9. Il norvegese vive nella prima casa.
10. Chi fuma le Mammolo ha un vicino con un gatto.
11. Chi fuma le Eolo beve birra.
12. Chi ha un cavallo vive vicino a chi fuma le Pisolo.
13. Il tedesco fuma le Gongolo
14. Il norvegese vive vicino alla casa blu.
15. Chi fuma le Mammolo ha un vicino che beve acqua.

Si vuole sapere chi possiede un pesciolino.

Soluzione

Si narra (ma, si ripete, sembrano essere invenzioni) che Einstein abbia sostenuto che solo circa il 2% della popolazione mondiale sarebbe riuscito a risolvere il problema.

In realtà il problema è molto meno complesso se lo si affronta con ordine e metodo. Il peggior modo possibile per risolverlo (nel senso che implica la maggior difficoltà) consiste nel risolverlo "a mente", senza l'uso di carta e matita. Appena si prende in mano una matita ed un pezzo di carta le cose si semplificano notevolmente.

Chi volesse tentare di risolvere da solo il problema (vivissimamente consigliato) è invitato a non girare pagina.

[2]Per non fare pubblicità, le marche di sigarette originali sono state sostituite con i nomi dei sette nani. Ovviamente ne mancano due: Dotto, che non fuma perché dotto, appunto, e Cucciolo che è troppo piccolo.

Le 15 proposizioni indicate nella tabella vanno lette e rilette, in modo da prendere confidenza con esse e permettere collegamenti più semplici e veloci. Successivamente conviene organizzare le singole voci come se fossero appartenenti ad una matrice di 5 righe e 5 colonne. Detta matrice va pian piano riempita.

Alcuni elementi si possono sicuramente già porre nella corretta posizione. A ciò ci aiutano le proposizioni 9, 14 e 8, come si evince dalla fig.3.2.

Figura 3.2: Primo passo del problema di Einstein

Dalla proposizione 9 possiamo senza dubbio porre il norvegese nella prima colonna (abita nella prima casa) e il suo unico vicino di casa (proposizione 14) vive nella casa blu, che quindi deve per forza stare in colonna 2. Infine, la proposizione 8 dice che chi abita nella casa centrale (colonna 3) beve latte.

Le prossime due proposizioni da valutare sono la 4 e la 5. La proposizione 4 sostiene che la casa verde è immediatamente alla sinistra[3] di quella bianca. Si decide (vedi nota sottostante) che la sinistra è determinata avendo le case di fronte.

Siccome la colonna 2 è già occupata dalla casa blu le due suddette case possono solamente stare rispettivamente in colonna 3 e 4 oppure in colonna 4 e 5. La proposizione 5 ci viene, però, in aiuto sostenendo che chi vive nella casa verde beve caffè. Quindi siamo ora in grado di disporre sulla matrice altri tre simboli: la casa verde in colonna 4, la casa bianca a destra, ossia in colonna 5 e il caffè nella colonna 4, che è infatti la bevanda preferita di chi abita nella casa verde.

La nuova situazione è quella evidenziata in fig. 3.3 nella pagina successiva.

Naturalmente, man mano che i simboli si collocano all'interno della matrice, il problema diventa via via sempre più facile. Si nota, ad esempio, che mancano solo due case all'appello, per cui probabilmente conviene concentrarsi su di esse. La proposizione 1 dice che l'inglese vive nella casa rossa. In effetti

[3]Il termine "sinistra" è decisamente ambiguo: a sinistra dando le spalle alle case o avendole di fronte? Non ci sono indizi per determinarlo, quindi si aprono due casi: 1) il termine "sinistra" significa "a fianco" e di conseguenza è ininfluente, ai fini della risoluzione, come si dispongono le due colonne relative alla casa verde e alla casa bianca; 2) il termine "sinistra" *non* significa "a fianco" e si deve procedere per tentativi. E' evidente che in un caso si giunge alla soluzione e nell'altro no. Se non si giunge alla soluzione con la scelta fatta si dovrà tornare nel presente punto della soluzione ed invertirla.

la casa rossa non è stata ancora disposta nella matrice e non può certamente essere collocata in colonna 1, perché quella è la colonna del norvegese. Di conseguenza l'unica colonna libera è quella centrale, ove collocheremo la casa rossa e la bandiera inglese. Per esclusione possiamo anche porre la casa gialla in colonna 1 essendo essa libera. Quindi la casa gialla è quella dove abita il norvegese.

Figura 3.3: Secondo passo del problema di Einstein

Ma non basta! Il predicato 7 dice che chi vive nella casa gialla (e ormai sappiamo che si tratta del norvegese, in colonna 1) fuma le sigarette Pisolo[4], mentre la proposizione 12 sostiene che il possessore del cavallo vive vicino al fumatore delle Pisolo. Siccome detto fumatore vive nella prima casa e ha un solo vicino, anche il cavallo trova la sua corretta collocazione.

Quindi il quadro incomincia a delinearsi come in fig. 3.4.

Figura 3.4: Terzo passo del problema di Einstein

Ora tutte le case sono allineate e ciò costituisce sicuramente un aiuto.

Le prossime proposizioni da analizzare richiedono un po' di attenzione. Di particolare interesse sono la proposizione 3 e la proposizione 11. La prima dice che il danese beve té e la seconda dice che chi fuma le Eolo beve birra. Ciò significa solo e solamente che il danese e il bevitore di birra possono occupare (non sappiamo ancora in quale ordine) unicamente le colonne 2 e 5. Si tratta, infatti, delle uniche due colonne vuote nella riga delle bevande, con l'eccezione

[4]Le sigarette sono abbinate nelle figure ad una lettera maiuscola: essa rappresenta l'inizialre del corrsipondente nano.

della colonna 1, dove, però, vive un norvegese (quindi il danese non può esservi collocato) che fuma le Pisolo (per cui non può esservi collocato nemmeno il fumatore di Eolo).

Quindi è fuori dubbio che il danese e il bevitore di birra devono occupare le predette colonne, ma in che ordine? A sciogliere il dubbio ci pensa la proposizione 15 che avverte che chi fuma le Mammolo ha un vicino che beve acqua. Ma l'acqua, per esclusione, può essere bevuta solo in colonna 1, il che significa che il fumatore di Mammolo deve trovare posto in colonna 2. Quindi la colonna 2 non può essere occupata da chi fuma le Eolo e beve birra, che deve trovare posto per forza di cose in colonna 5, mentre il danese occuperà la colonna 2.

Dopo quest'ultima riflessione, la situazione relativa alla matrice dei simboli è quella illustrata in fig. 3.5 a pagina 26.

Figura 3.5: Quarto passo del problema di Einstein

Ora, praticamente, l'esercizio è terminato. La proposizione 13 sostiene che il tedesco fuma le Gongolo. Ma il tedesco può stare solamente in colonna 4 o in colonna 5, dato che le prime 3 colonne sono occupate da un norvegese, un danese e un inglese. Siccome la colonna 5 è già occupata dal fumatore di Eolo, il tedesco e le sue Gongolo devono essere collocati in colonna 4. Ciò implica che l'inglese deve fumare le Brontolo e, in base alla proposizione 6, possedere un canarino. Siccome lo svedese, insieme al proprio cane, deve essere collocato nell'unica colonna libera, ossia la 5, quello che rimane senza animale domestico è il tedesco, che quindi possiede il pesciolino. La matrice completa è quella di figura 3.6.

Figura 3.6: Soluzione del problema di Einstein

Il problema, a voler essere pignoli, non è ancora completamente terminato. Manca una riflessione. Dobbiamo ancora stabilire se "sinistra" significa "a fianco" o meno. Si nota, rileggendo le 15 proposizioni che la colonna 4 e la colonna 5 sono perfettamente interscambiabili, per cui si deduce che l'estensore del problema ha usato il termine "sinistra" per confondere il solutore, dato che detto termine significa esattamente "a fianco".

3.1.1 Commento all'esercizio

Il problema è stato risolto piuttosto facilmente perché è stato impostato correttamente e perché è stato risolto per gradi, non come se fosse un tutt'uno. L'idea che ha permesso di semplificare la soluzione è stato l'uso di una matrice da riempire ed è stata riempita elemento per elemento. In tal modo il problema è stato affrontato con ordine e con metodo, lasciando ben poco (anzi assolutamente nulla) all'intuizione. L'uso della matrice non era assolutamente necessario, un qualsiasi altro metodo andava benissimo. Si ricordi, però, che il cervello lavora molto bene per immagini: quindi conviene aiutarlo.

Purtroppo (?) il problema non è stato solo impostato (analizzato), ma anche risolto (sintetizzato). D'altronde non si poteva farne a meno se si voleva risultare credibili nell'impostazione. Un problema altrettanto famoso (e per certi versi simile) verrà illustrato (per compensazione) nel capitolo della sintesi.

3.2 Tre resistori e un generatore

Il prossimo esercizio è un tributo ad un grande insegnante: l'ing. Luciano Lavezzi, che ha insegnato Elettrotecnica presso ITI "A. Malignani" di Udine negli anni '60-'80. A lui è attribuito il sottostante circuito, anche se non ci sono prove certe della effettiva paternità. Poco importa: per i suoi ex-studenti si tratta sempre, affettuosamente, del "circuito di Lavezzi".

Esercizio - ◊◊♦ Il circuito di Lavezzi

Sia dato il sottostante circuito in regime stazionario. I componenti hanno i seguenti valori: $E_0 = 10V$, $R_1 = R_2 = R_3 = 100\Omega$.

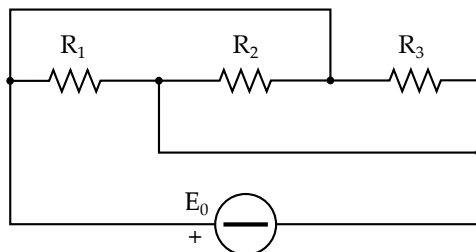



Figura 3.7: Circuito in regime stazionerio con tre resistori

Si vuole sapere qual è la potenza erogata dal generatore di tensione.

Soluzione

L'autore delle presenti pagine ha sottoposto, negli anni, il suddetto circuito all'attenzione di centinaia di studenti e ha avuto modo di ascoltare moltissime soluzioni e risposte: alcune corrette, altre parzialmente corrette, molte errate, alcune pazzesche. Nessuna soluzione ascoltata, però, avrebbe avuto l'avvallo dell'anziano professore. Per il semplice motivo che nessuna delle soluzioni sentite era stata trovata e perseguita con metodo.

Se si vuole risolvere un circuito lineare in regime stazionario due sono le cose da fare prima di qualsiasi altra:

1. porre i nomi ai nodi (in modo da evidenziare le superfici equipotenziali);
2. indicare le direzioni delle correnti nei singoli rami e nominarle.[5]

Si veda il circuito sottostante per verificare il risultato.

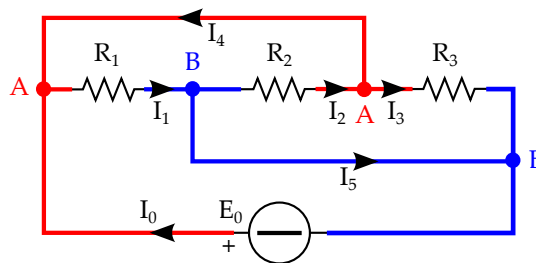



Figura 3.8: Circuito con superfici equipotenziali evidenziate

Siccome è sufficiente calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore per risolvere il circuito (si chiede solamente la potenza ergogata), si procederà in tal senso.

Un buon metodo è tale se utilizza anche le leggi e le definizioni fornite dalla scienza. Cartesio lo dice a commento della regola terza delle "Regole per la guida dell'ingegno":

> "*Si devono leggere i libri degli Antichi, dal momento che è un notevole beneficio che noi si possa utilizzare le fatiche di tanti uomini: sia per conoscere quelle cose che già una volta sono state correttamente rintracciate, sia anche per essere messi sull'avviso di quali rimangano ulteriormente da cercare in tutte le discipline.*"

Le due definizioni che in questo momento potrebbero tornarci utili sono le seguenti:

Definizione 1 (Resistori in serie)**.**
n resistori si dicono in serie se sono attraversati dalla stessa[6] *corrente.*

Definizione 2 (Resistori in parallelo)**.**
n resistori si dicono in parallelo se sono sottoposti alla stessa[7] *differenza di potenziale.*

---

[5] La direzione delle singole correnti è presa in maniera assolutamente casuale. Se la direzione scelta sarà opposta rispetto a quella reale, il valore di corrente che si calcolerà sarà negativo.

[6] Il termine "stessa" non significa di egual valore, si badi bene, ma proprio la *stessa* corrente, ovvero avente egual nome.

[7] Anche in questo caso il termine "stessa" non significa di egual valore, si badi bene, ma proprio la *stessa* differenza di potenziale, ovvero avente egual nome.

Guardando il circuito di fig 3.8 appare evidente che i tre resistori sono attraversati da tre correnti diverse. La corrente che attraversa il resistore R_1, infatti, quando incontra il nodo B si divide nella I_2 e nella I_5 in osservanza del primo principio di Kirchhoff. Analogo ragionamento di può fare per la corrente I_2 e per la corrente I_3. Quindi si deduce che i tre resistori non sono collegati in serie fra loro. Si deve ora verificare se R_1, R_2 e R_3 sono collegati in parallelo, ossia se sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale. Il resistore R_1 è sottoposto alla differenza di potenziale V_{AB}, dato che il suo reoforo sinistro è collegato alla superficie equipotenziale A e quello destro alla superficie equipotenziale B. Anche il resistore R_2 è sottoposto alla differenza di potenziale V_{AB}[8], per lo stesso motivo e così pure il resistore R_3. I tre resistori sono quindi indubbiamente collegati in parallelo. Il circuito equivalente, prima del calcolo della resistenza equivalente è il seguente:

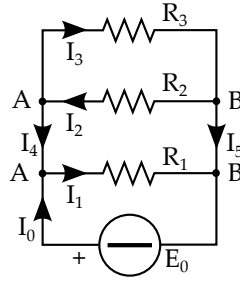



Figura 3.9: Circuito equivalente

Si notino le direzioni delle correnti: esse sono rimaste coerenti con il circuito di fig. 3.8.

Naturalmente ora il problema è risolto, nel senso che è stato compiutamente analizzato. Il prosieguo dell'esercizio è pura sintesi e non si ritiene possa rappresentare difficoltà alcuna per lo studente. Comunque, per pura pignoleria, si porterà a termine l'esercizio, ribadendo, però, che dal punto di vista dell'analisi lo si ritiene concluso.

Innanzi tutto si fa una riflessione: essendo i tre resistori uguali anche *il modulo* delle correnti I_1, I_2 e I_3 risulta essere uguale, ma non si tratta della *stessa* corrente.

Le tre correnti sono facilmente calcolabili, mediante la legge di Ohm:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{10}{100} = 100mA \tag{3.1}$$

$$I_2 = -\frac{V_{AB}}{R_2} = -\frac{10}{100} = -100mA \tag{3.2}$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{10}{100} = 100mA \tag{3.3}$$

Si fa notare che la corrente I_2 è negativa. Ciò è dovuto al fatto che quando si usa la notazione V_{AB} si intende che $V_{AB} = V_A - V_B$. Ciò significa che V_{AB} è

[8]Sarebbe pretestuoso dire che il resistore R_2 non è sottoposto alla d.d.p. V_{AB}, ma alla V_{BA}, dato che non è noto quale potenziale è maggiore e quale minore.

positiva se V_A è maggiore di V_B. Siccome la corrente, nei componenti passivi, fluisce dal potenziale maggiore a quello minore (si pensi, ad esempio, al paragone idraulico) e siccome la corrente I_2 fluisce, nel circuito 3.8, dal potenziale B a quello A, dato che nella 3.2 si è usato la V_{AB} anziché la V_{BA}, si è dovuto anteporre il segno '-' alla frazione.

Ora è possibile determinare anche le correnti I_4 , I_5 e I_0. Applicando il primo principio di Kirchhoff al secondo dei due nodi A si ha:

$$I_2 = I_4 + I_3 \tag{3.4}$$

da cui

$$I_4 = I_2 - I_3 = -100 \cdot 10^{-3} - 100 \cdot 10^{-3} = -200mA \tag{3.5}$$

Mentre sul secondo nodo B si ha:

$$I_3 = I_5 + I_2 \tag{3.6}$$

da cui

$$I_5 = I_3 - I_2 = 100 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot 10^{-3} = 200mA \tag{3.7}$$

Ed infine

$$I_1 = I_4 + I_0 \tag{3.8}$$

da cui

$$I_0 = I_1 - I_4 = 100 \cdot 10^{-3} + 200 \cdot 10^{-3} = 300mA \tag{3.9}$$

Per cui la potenza erogata dal generatore vale:

$$P_{e0} = V_0 \cdot I_0 = 10 \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 3W \tag{3.10}$$

Siccome la potenza dissipata deve uguagliare la potenza erogata, è anche facile verificare l'equilibrio energetico nel circuito:

$$P_{d0} = \frac{V_{AB}^2}{R_1} + \frac{V_{AB}^2}{R_2} + \frac{V_{AB}^2}{R_3} = 1 + 1 + 1 = 3W \tag{3.11}$$

3.2.1 Commento all'esercizio

Molti studenti risolvono il suddetto esercizio facendo buon uso del proprio intelletto e del proprio intuito. Naturalmente si fanno i dovuti complimenti. I complimenti sono rivolti, però, all'intelletto, non al metodo, che probabilmente non è stato altrettanto all'altezza. Si fa notare che ponendo i nomi ai nodi e dando un verso casuale alle correnti, il circuito si semplifica istantaneamente. Non c'è voluto alcuno sfrozo intellettuale per semplificarlo, ma solo un atteggiamento metodico e ordinato.

Infine, si deve svelare una piccola bugia. Fra gli studenti dell'indimenticato professore, tra i quali l'autore dei presenti appunti ha avuto la fortuna di appartenere nei lontani anni '70, il circuito non era noto come il "circuito di Lavezzi", ma come il "parallelo di Lavezzi". Ma questo, per ovvi motivi, non lo si poteva dire.

3.3 Un incrocio pericoloso

Anche il seguente esercizio è un classico. E' la prova lampante che quando si suddivide un problema in sottoproblemi più semplici, le difficoltà si dissolvono come neve al sole. Stavolta analizziamo un circuito di logica combinatoria e scomporremo il circuito mediante la tecnica degli schemi a blocchi.

Esercizio - ◊◊♦ Incrocio con semaforo

Sia dato un incrocio regolato da semaforo, simile a quello indicato in fig. 3.10.

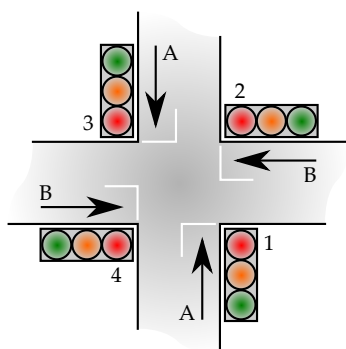



Figura 3.10: Incrocio regolato da semaforo

Si vuole tracciare lo schema a blocchi di un circuito di logica combinatoria che attivi la linea d'uscita *Err* in presenza di almeno uno dei seguenti guasti che possono verificarsi:

- *guasto di tipo 1*: si ha guasto di tipo 1 quando un singolo semaforo non attiva alcuna luce oppure quando attiva contemporaneamente più di una luce;
- *guasto di tipo 2*: si ha guasto di tipo 2 quando almeno una coppia di semafori posti sulla stessa direttrice attiva luci differenti. Sono posti sulla stessa direttrice la coppia di semafori 1 e 3 come pure la coppia di semafori 2 e 4. Ciò significa, ad esempio, che se il semaforo 1 indica Rosso, anche il semaforo 3 deve indicare Rosso, altrimenti si ha guasto di tipo 2;
- *guasto di tipo 3*: si ha guasto di tipo 3 quando almeno una coppia di semafori posti su direttrici opposte attiva luci non coerenti fra loro. Ciò significa, ad esempio, che se il semaforo 1 indica Verde o Arancione, il semaforo 2 deve indicare Rosso, altrimenti si ha guasto di tipo 3.

Si aggiunge un'ultima regola: siccome si suppone che i singoli blocchi di logica combinatoria debbano essere risolti mediante le mappe di Karnaugh, ciascun blocco non deve presentare più di 4 ingressi.

Si supponga, infine, che il circuito combinatorio richiesto abbia 12 ingressi: uno per ciascuna lampada. All'attivazione della lampada corrisponde l'attivazione (positiva) del relativo bit di ingresso.

Il circuito non deve correggere l'eventuale guasto, deve solamente rilevarlo attivando la linea *Err*.

Soluzione

In fig. 3.10 è rappresentato l'incrocio regolato da semaforo. I semafori 1 e 3 sono posti sulla direttrice A, mentre i semafori 2 e 4 sono posti sulla direttrice B. Semafori posti sulla stessa direttrice devono attivare le stesse luci. Quando i semafori posti su una direttrice attivano il Verde o l'Arancione, i semafori posti sulla direttrice opposta devono attivare il Rosso.

Il problema, se non suddiviso in problemi più semplici, presenta più di qualche difficoltà. Si supponga, ad esempio, di voler realizzare un unico blocco di logica combinatoria. Si avrebbero 12 ingressi e non sarebbe materialmente possibile applicare le mappe di Karnaugh. Si potrebbe applicare la sintesi AND-OR, ma si dovrebbe minimizzare la rete per via algebrica e rinunciare alle facilitazioni fornite da Karnaugh.

Se il problema è chiaro, si invita lo studente, momentaneamente, a non proseguire nella lettura dell'esercizio ma a cimentarsi autonomamente nel tentativo di risoluzione. Si accorgerà che si tratta di un'azione tutt'altro che semplice. Suddividere un problema complesso in sottoproblemi è facile a dirsi, ma molto più complicato a farsi.

Per facilitare un po' il lavoro dello studente si consiglia di immaginare ogni blocco come una scatola di cartone nella quale sia seduta una persona. Essa comunica con gli altri blocchi (persone) mediante dei codici binari di ingresso formati al massimo da 4 bit, mentre non c'è limite ai bit del codice di uscita.

3.3.1 Il blocco di gestione del guasto di tipo 1

Si propone subito una soluzione "ottimale", senza passare attraverso approssimazioni successive o soluzioni "finte".

Si supponga un blocco G1 per ciascun semaforo, atto a gestire il guasto di tipo 1. Ciascuno di tali blocchi avrà tre ingressi: uno per ciascuna lampada. Ci si deve chiedere quale debba essere la funzione del blocco, ovvero cosa debba fare la persona seduta dentro la scatola/blocco.

Sicuramente la persona dovrà "leggere" e interpretare le informazioni in ingresso e trasferire una qualche informazione in uscita. Si immagina che l'informazione da trasferire in uscita debba essere relativa allo stato del semaforo, per cui ci si chiede quante diverse informazioni si devono trasferire.

In base al numero di informazioni diverse che si devono trasferire si potrà stabilire il numero di bit d'uscita necessari.

E' importante, ad esempio, sapere se il semaforo x ha attivato il Rosso? Probabilmente sì, ma lo studente "cartesiano" non si limita a dire "sì" oppure "no", ma dice "sì, perché ..." oppure "no, perché ..." in modo da procedere solo per verità evidenti.

> *"Così con questa proposizione respingiamo tutte quelle cognizioni soltanto probabili, e stabiliamo che non si debba prestare fede se non a quelle perfettamente note e di cui non sia possibile dubitare.*
>
> Cartesio - Regole per la guida dell'ingegno

Una possibile risposta potrebbe essere: “Sì, perché il semaforo posto sulla stessa direttrice del semaforo x deve attivare la stessa identica luce, quindi deve essere possibile valutare se i due semafori, ad esempio, attivano entrambi il Rosso.”

Non è quindi sufficiente, ad esempio, indicare in uscita che il semaforo é oppure non é affetto da guasto di tipo 1: deve essere nota la luce attivata. Il blocco che abbiamo chiamato G1 dovrà quindi “propagare” la luce attiva, nel caso questa fosse rappresentativa del corretto funzionamento del singolo semaforo, quindi immune da guasto di tipo G1.

Si potrebbe pensare di porre in uscita al blocco/scatola un codice di 3 bit, dove il bit 2 equivale al Rosso, il bit 1 equivale all'Arancione e il bit 0 equivale al Verde e attraverso i quali si evidenzia l'attivazione del semaforo.

L'attività del semaforo potrebbe quindi essere descritta attraverso un codice simile a quello indicato nella tabella 3.1.

Rosso	Arancio	Verde	Descrizione
0	0	0	Nessuna luce accesa
0	0	1	Verde acceso
0	1	0	Arancio acceso
0	1	1	Arancio e Verde accesi
1	0	0	Rosso acceso
1	0	1	Rosso e Verde accesi
1	1	0	Rosso e Arancione accesi
1	1	1	Tutte le luci accese

Tabella 3.1: Esempio di codice ridondante

Lo studente farebbe ora bene a dare un'occhiata all'espressione severa di Cartesio nel dipinto di Frans Hals riprodotto in fig. 1.1 a pagina 2. Pare che dica: “Stai coltivando il dubbio, figliolo?” Traduzione: “Sicuro che una siffatta tabella vada proprio bene?”

Effettivamente la tabella 3.1 sembra un po' prolissa. Ad una prima analisi non sembra necessario distinguere, ad esempio, fra l'attivazione contemporanea di Rosso e Verde e l'attivazione di tutte le luci del semaforo[9]. Semplicemente una simile situazione è genericamente identificabile con una situazione di guasto di tipo 1.

Esiste la possibilità di formulare un codice più efficiente e ridurre il numero di bit di uscita del blocco? Si potrebbe ipotizzare una seconda tabella che effettivamente riduca il numero degli stati codificati in uscita, come evidenziato nella tabella 3.2 nella pagina seguente.

Ci si deve chiedere se una siffatta codifica vada bene oppure no. Innanzi tutto è bene cercare di capire bene la tabella.

[9]Si sta qui supponendo un semaforo che attiva *solamente una luce alla volta*. Non si sta quindi ipotizzando semafori simili a quelli presenti, ad esempio, in Austria, ove il Verde è preceduto dalla presenza contemporanea del Rosso e dell'Arancione. Non si sta nemmeno ipotizzando un funzionamento simile a quello di qualche anno fa, quando i semafori, prima di attivare il Rosso, attivavano sia il Verde che l'Arancione.

Le diverse situazioni che il semaforo può rappresentare accendendo variamente le proprie luci possono essere codificate mediante quattro codici differenti: se si pone in uscita del blocco il codice 11 significa che il semaforo ha attivato la sola luce rossa; ponendo in uscita il codice 10 si indica la sola luce arancione; pone 01 si indica la sola luce verde; ponendo 00 si indica un guasto di tipo 1.

B_1	B_0	Descrizione
0	0	Guasto
0	1	Verde acceso
1	0	Arancio acceso
1	1	Rosso acceso

Tabella 3.2: Esempio di codice ben dimensionato

Si noti che, in tal caso, *non è necessario sapere* se il guasto di tipo 1 è causato dall'attivazione di tutte le luci, delle sole luci Verde e Rosso oppure di nessuna luce. Basta sapere che c'è un guasto. Inoltre, lo studente avrà modo di verificare che il codice 00 *non identifica* il guasto di tipo 1, ma uno dei possibili guasti ingenerale, dato che l'esercizio non chiede di distinguere fra i diversi tipi di guasto.

Lo studente che non dovesse essere convinto di quanto fin qui affermato dovrebbe essere in grado di sostenere che una informazione meno generica di "guasto" *è necessaria* e dovrebbe dire il *perché*.

Non si sta chiedendo all'allievo di esprimere un'opinione, ma di confutare logicamente le proposizioni "è sufficiente indicare una situazione di guasto" e "non è necessario indicare quale situazione ha provocato il guasto".

Atteggiamento critico non significa semplicemente distruggere il lavoro altrui, ma costruire insieme cercando di evitare gli errori.

Alla luce di quanto detto si può tentare di definire un primo blocco (per ciascun semaforo) così come è stato fin qui descritto:

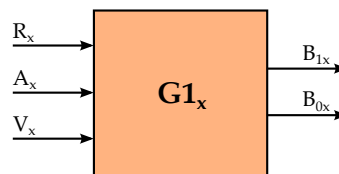



Figura 3.11: Blocco G1 (guasto di tipo 1)

Segnali d'ingresso

- $\mathbf{R_x}$: Ingresso relativo alla luce rossa del semaforo x. Quando il Rosso viene acceso, il segnale diventa attivo alto;
- $\mathbf{A_x}$: Ingresso relativo alla luce arancione del semaforo x. Quando l'Arancione viene acceso, il segnale diventa attivo alto;
- $\mathbf{V_x}$: Ingresso relativo alla luce verde del semaforo x. Quando il Verde viene acceso, il segnale diventa attivo alto.

Segnali d'uscita

- **B_{1x}:B_{0x}**: Uscite del blocco relativo al semaforo x. I due bit di uscita formano un codice secondo quanto descritto nella tab. 3.2. Le uscite sono attive alte.

Funzione del blocco

- **$G1_x$**: La funzione di un blocco di logica combinatoria è sempre univocamente identificata dalla sua tabella di verità. Tale tabella è indicata in tab. 3.3.

R_x	A_x	V_x	B_{1x}	B_{0x}	Descrizione
0	0	0	0	0	Guasto
0	0	1	0	1	Verde acceso
0	1	0	1	0	Arancio acceso
0	1	1	0	0	Guasto
1	0	0	1	1	Rosso acceso
1	0	1	0	0	Guasto
1	1	0	0	0	Guasto
1	1	1	0	0	Guasto

Tabella 3.3: Tabella di verità del blocco G1

3.3.2 Il blocco di gestione del guasto di tipo 2

Se si è entrati nella filosofia della soluzione proposta, il resto dell'esercizio è tutto in discesa. Una volta definito il blocco che gestisce per ciascun semaforo il guasto di tipo 1, si può tentare di definire il blocco che gestisce il guasto di tipo 2. Questo secondo blocco deve poter rilevare le differenze fra semafori posti sulla stessa direttrice. Per fare ciò esso ha sicuramente bisogno dei risultati dell'elaborazione dei due blocchi $G1_x$ relativi alla coppia di semafori. Le uscite dei due blocchi $G1_x$ devono essere confrontate e devono risultare assolutamente identiche. Se non lo dovessero essere saremmo sicuramente in presenza di un errore di tipo 1 oppure di tipo 2.

Si noti che, paradossalmente, i due semafori potrebbero essere entrambi affetti da guasto di tipo 1 ed essere quindi perfettamente coerenti. Comunque verrebbe propagato l'errore di tipo 1.

La cosa è fattibile dato che i due blocchi presentano in uscita 2+2 segnali e che questi diventano i segnali d'ingresso del blocco di rilevamento del guasto di tipo 2. Il blocco $G2_x$ è quindi sintetizzabile mediante le mappe di Karnaugh così come l'esercizio si prefiggeva.

Se non vengono riscontrati errori dal blocco di gestione del guasto di tipo 2, significa che i due semafori hanno attivato le *stesse* luci, quindi il blocco può essere usato per *propagare* l'informazione.[10]

[10]Come già suggerito precedentemente, il fatto che l'informazione venga propagata non significa necessariamente che i due semafori funzionino correttamente: potrebbero semplicemente essere entrambi affetti da guasto di tipo 1.

In tal modo, 2 soli bit possono essere usati per definire la situazione non solo di un semaforo, ma di una coppia di semafori posti sulla stessa direttrice.

In fig.3.12 è illustrato il blocco $G2_x$.

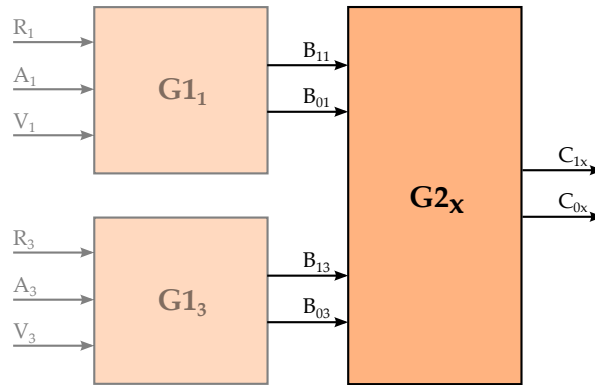



Figura 3.12: Blocco G2 (guasto di tipo 2)

Segnali d'ingresso

- $\mathbf{B_{1x}:B_{0x}}$: Ingressi relativi allo stato del semaforo x. Sono prodotti dal blocco $G1_x$ e sono attivi alti;
- $\mathbf{B_{1y}:B_{0y}}$: Ingressi relativi allo stato del semaforo y posto sulla stessa direttrice del semaforo x. Sono prodotti dal blocco $G1_y$ e sono attivi alti.

Si ponga attenzione al fatto che in fig. 3.12 questi segnali sono indicati con $\mathbf{B_{11}:B_{01}}$ e $\mathbf{B_{13}:B_{03}}$. Tale simbologia è utilizzata per facilitare lo studente nell'identificazione dei semafori, ma si tratta di un esempio.

Segnali d'uscita

- $\mathbf{C_{1x}:C_{0x}}$: Uscite del blocco relativo alla coppia x di semafori posti sulla stessa direttrice. I due bit di uscita formano lo stesso codice usato dai blocchi $G1_x$ e descritto nella tab. 3.2. La giustificazione di una siffatta scelta verrà fornita fra breve. Le uscite sono attive alte.

Funzione del blocco

- $\mathbf{G2_x}$: Anche in questo caso si fornisce una spiegazione della funzione del blocco non attraverso il linguaggio naturale ma attraverso la appropriata tabella di verità, che identifica la funzionalità del blocco in maniera formale e non ambigua. Essa è indicata in tab. 3.4 nella pagina successiva.

Per semplicità si è ipotizzato che i segnali d'ingresso del blocco $G2_x$ fossero forniti dai blocchi $G1_1$ e $G1_3$ relativi rispettivamente al semaforo 1 e 3, posti sulla direttrice A.

Innanzi tutto si nota che il blocco $G2_x$ ha 4 ingressi, quindi è sintetizzabile con Karnaugh senza difficoltà. Per il momento siamo riusciti nell'intento di "semplificare" il problema, dato che la sintesi di ciascun blocco è cosa veramente semplice (anzi, meccanica).

Inoltre, è utile riprendere il concetto della *propagazione* dell'informazione alla quale si è accennato precedentemente. Se i due semafori presentano codici

diversi in uscita, il blocco $G2_x$ deve produrre un codice di guasto di tipo 2 in uscita.

B_{1x}	B_{0x}	B_{1y}	B_{0y}	C_{1x}	C_{0x}	Descrizione
0	0	0	0	0	0	Guasto
0	0	0	1	0	0	Guasto
0	0	1	0	0	0	Guasto
0	0	1	1	0	0	Guasto
0	1	0	0	0	0	Guasto
0	1	0	1	0	1	Verde acceso
0	1	1	0	0	0	Guasto
0	1	1	1	0	0	Guasto
1	0	0	0	0	0	Guasto
1	0	0	1	0	0	Guasto
1	0	1	0	1	0	Arancio acceso
1	0	1	1	0	0	Guasto
1	1	0	0	0	0	Guasto
1	1	0	1	0	0	Guasto
1	1	1	0	0	0	Guasto
1	1	1	1	1	1	Rosso acceso

Tabella 3.4: Tabella di verità del blocco G2

Se, invece, i codici dei due semafori sono uguali (fossero anche due codici di guasto di tipo 1) vanno semplicemente propagati vero l'ultimo blocco. Si noti, infatti, che il blocco $G2_x$ non ha alcun bisogno di aumentare l'informazione in uscita e che un codice di due bit, come nel blocco $G1_x$, rimane assolutamente sufficiente: non vi è mai la necessità di aumentare l'informazione Rosso-Arancione-Verde-Guasto.

Si sottolinea, ancora, che non vi è anche nessuna necessità di trasmettere il *tipo* di guasto: è sufficiente sapere che vi è un qualche guasto nel sistema.

3.3.3 Il blocco di gestione del guasto di tipo 3

L'ultimo blocco è una formalità. Esso ha il compito di confrontare le due coppie di semafori e di gestire il segnale di *Err* conclusivo.

Se anche una sola delle due coppie di semafori presenta al blocco G3 un codice di guasto (che sia generato da una situazione di guasto di tipo 1 o di tipo 2 non ha importanza), la linea d'uscita *Err* va attivata.

Inoltre, la linea *Err* va attivata anche se le due coppie di semafori non sono sono coerenti fra loro. Ciò significa che non devono provocare incidenti e che si devono comportare come gli utenti della strada se lo aspettano: quando la coppia di semafori posti sulla direttrice A permette il fluire del traffico (quindi è accesa la luce verde o arancione), sulla direttrice B il traffico deve essere bloccato (quindi è accesa la luce rossa).

Rovesciando le parti si può fare un ragionamento del tutto analogo.

In fig. 3.13 è rappresentato il blocco G3 (ed il collegamento ai restanti blocchi). La parte evidenziata è quella di stretta competenza del blocco G3 e la restante parte costituisce il completamento dello schema a blocchi.

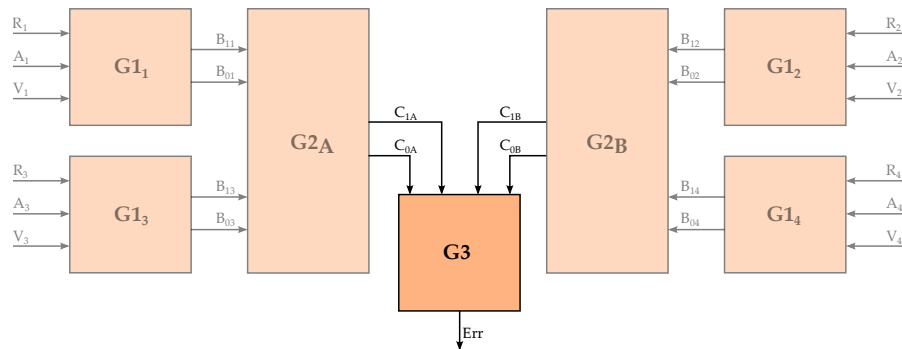



Figura 3.13: Blocco G3 (guasto di tipo 3)

Segnali d'ingresso

- $\mathbf{C_{1x}}$:$\mathbf{C_{0x}}$: Ingressi relativi allo stato della coppia x di semafori posti su una delle due direttrici. Sono prodotti dal blocco $G2_x$ e sono attivi alti;
- $\mathbf{C_{1y}}$:$\mathbf{C_{0y}}$: Ingressi relativi allo stato della coppia y di semafori y posti sull'altra direttrice. Sono prodotti dal blocco $G2_y$ e sono attivi alti.

Si ponga attenzione al fatto che in fig. 3.13 questi segnali sono indicati con $\mathbf{C_{1A}}$:$\mathbf{C_{0A}}$ e $\mathbf{C_{1B}}$:$\mathbf{C_{0B}}$. Anche in questo caso la simbologia è utilizzata per facilitare lo studente nell'identificazione dei semafori, ma si tratta sempre di un esempio.

Segnali d'uscita

- **Err**: Uscita del blocco G3. Rappresenta l'indicazione generale di guasto al sistema. Se posto a 0 logico indica assenza di guasti. Se posto a 1 indica la presenza di almeno un guasto nel sistema, senza, ovviamente, specificare di quale tipo si tratti o a quale parte del sistema sia riferito. L'uscita è, quindi, attiva alta.

Funzione del blocco

- **G3**: La funzione del blocco G3 è praticamente già stata illustrata: essa consiste nel rilevare eventuali incoerenze fra le coppie di semafori, in modo da rilevare situazioni di potenziale pericolosità per il traffico.

La tabella di verità è indicata in tab. 3.5 a fronte.

Anche il blocco G3 è facilmente sintetizzabile mediante le mappe di Karnaugh, dato che non possiede più di 4 ingressi.

La fig.3.13 mostra non soltando il blocco G3 ma l'intero schema a blocchi. Il problema così come è stato formulato nel testo dell'esercizio e, tutto sommato, di una certa complessità è stato suddiviso in ben sette blocchi. Questi sette blocchi implicano tre sintesi distinte e quindi una mole di lavoro piuttosto importante, ma non complessa.

La sintesi di una logica combinatoria, soprattutto se effettuata mediante le mappe di Karnaugh, è un'azione piuttosto meccanica e priva di difficoltà intrinseche, per cui si può ben dire che la difficoltà di sintesi e la relativa minimizzazione del circuito risulta essere più semplice in tal modo.

C_{1x}	C_{0x}	C_{1y}	C_{0y}	Err	Descrizione
0	0	0	0	1	Guasto
0	0	0	1	1	Guasto
0	0	1	0	1	Guasto
0	0	1	1	1	Guasto
0	1	0	0	1	Guasto
0	1	0	1	1	Guasto
0	1	1	0	1	Guasto
0	1	1	1	0	x: Verde; y: Rosso
1	0	0	0	1	Guasto
1	0	0	1	1	Guasto
1	0	1	0	1	guasto
1	0	1	1	0	x: Arancione; y: Rosso
1	1	0	0	1	Guasto
1	1	0	1	0	x: Rosso; y: Verde
1	1	1	0	0	x: Rosso; y: Arancione
1	1	1	1	1	Guasto

Tabella 3.5: Tabella di verità del blocco G3

Si è così giunti alla conclusione dell'esercizio. Almeno in parte. Si ritiene doverosa una breve riflessione.

3.3.4 Commento all'esercizio

Si è cercato di illustrare allo studente un esempio di come si possa suddividere in sottoproblemi più semplici un problema relativamente complesso. Può darsi che lo studente si sia effettivamente convinto che i singoli blocchi G1, G2 e G3 siano effettivamente più semplici da sintetizzare (cosa peraltro non fatta, perché non richiesta dal testo dell'esercizio) che non un ipotetico blocco che riassuma in sé l'intera logica combinatoria.

Il problema è un altro. E' possibile che lo studente abbia sì compreso la suddivisione del problema (l'analisi cartesiana), ma che sospetti che non ci sarebbe mai arrivato da solo. Solitamente lo studente è molto "pragmatico" e "concreto" (uso volutamente questi termini tra virgolette, perché sono appropriati solo in prima analisi).

Solitamente (non sempre, naturalmente), lo studente è concentrato sul *come si fa*. Quando il professore spiega, ad esempio, il Teorema di Pitagora, la concentrazione è massima quando alla lavagna compare la radice quadrata, non quando l'insegnante dimostra il Teorema. Ecco perché si è usato i termini *pragmatico* e *concreto* tra virgolette. Perché se così fosse, lo studente sarebbe più concentrato sul *perché* che sul *come*.

L'allievo potrebbe obiettare:"Ma il **saper fare** non è una delle tre caratteristiche fondanti la didattica d'oggi?" Si, certo, ma le tre caratteristiche non

possono essere separate. "Sapere", "saper fare" e "saper essere" devono coabitare nella persona a formare una piramide: la base è il "sapere" e la cima è il "saper essere".

Lo studente dovrebbe quindi innanzi tutto chiedersi se ha capito *perché* il problema è stato suddiviso in ben sette parti e dovrebbe chiedersi se è convinto che la suddivisione abbia prodotto l'effetto voluto, ovvero una semplificazione del problema. Se l'allievo ha risposto con due "sì" anche il secondo passo è stato fatto nella direzione giusta (il primo era la coltivazione del dubbio).

In caso contrario, Cartesio è, come al solito, lapidario:

> *"Se nella serie delle cose da ricercare intervenga qualcosa che il nostro intelletto non sia in grado d'intuire sufficientemente bene, lì ci si deve fermare, né si devono esaminare le altre cose che seguono, ma ci si deve astenere da una fatica del tutto vana.*
>
> Cartesio - Regole per la guida dell'ingegno

Lo studente che non è quindi perfettamente sicuro di aver correttamente compreso quanto esposto in questa sezione, **deve** fermarsi e fugare tutti i dubbi che ha, respingendo la tentazione di proseguire la lettura delle presenti pagine. Può essere utile, in tal caso, scrivere i singoli dubbi emersi durante la lettura e lo studio su un pezzo di carta al fine di fissare i punti critici e sottoporli, in un secondo momento, all'attenzione dell'insegnante.

Non si nega che l'analisi proposta da Cartesio sia di difficile assimilazione. Ma è indispensabile. Lo studente deve esercitarsi quotidianamente a suddividere problemi complessi in sottoproblemi più semplici e l'insegnante deve accompagnare lo studente nel cammino. Alla fine di un percorso quinquennale o triennale l'allievo avrà certamente affinato questa capacità e avrà in tal modo anche migliorato il suo "saper fare". Soprattutto lo studente non avrà imparato a "saper fare" in maniera acritica ed ottusa, ma saprà applicare le sue abilità anche in situazioni nuove o non canoniche.

3.4 Un circuito *fail-safe*

Il prossimo problema, similmente a quello della sezione 3.2, è un tributo ad un altro grande insegnante: l'ing. Luciano Zearo, che ha insegnato Sistemi Automatici presso l'ITI "A. Malignani" di Udine negli anni '70-'90.

Siccome detto problema, nel suo piccolo, appartiene alla storia di quella che allora era la sezione Elettronica dell'Istituto, si desidera illustrarne la nascita.

Negli anni '80 l'autore della presente era uso rimproverare all'ing. Zearo l'eccessiva difficoltà dei suoi compiti in classe. A sua volta, anche l'ing. Zearo rimproverava all'autore lo stesso identico difetto, per cui decisero entrambi, di comune accordo, di redarre un compito a quattro mani, ciascuno con l'intento dichiarato di "vigilare" sulle difficoltà proposte dall'altro.

Ciò che ne uscì fu un compito in classe che viene ora riproposto come esercizio. Dopo la congiunta correzione del compito i due insegnanti dichiararono

fallito l'esperimento e non ne scrissero altri insieme. Con l'approvazione degli studenti.

Esercizio - ◊♦♦ Il circuito di Zearo

Sia dato la sottostante espressione booleana:

$$D = A + BC \tag{3.12}$$

Di essa è dato l'equivalente circuito combinatorio:

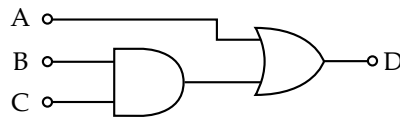



Figura 3.14: Semplice circuito combinatorio

Inoltre, si sa che il circuito può essere affetto da due tipi di guasto (ancora!?), mutuamente esclusivi:

guasto di tipo 1 : uno qualsiasi degli ingressi può guastarsi e, internamente alla porta logica, portarsi stabilmente a livello logico 1, indipendentemente dal valore logico presente sulla linea di ingresso (che non viene influenzata dal malfunzionamento). Nell'intero circuito può essere presente al massimo un solo guasto;

guasto di tipo 2 : una qualsiasi delle uscite delle porte logiche che compongono il circuito può guastarsi e portarsi stabilmente a livello logico 1, indipendentemente dai valori logici degli ingressi e dalla relativa funzione logica. Nell'intero circuito può essere presente al massimo un solo guasto, di tipo 1 o di tipo 2 , mutuamente esclusivi.

Si chiede:

1. la definizione di un circuito di logica combinatoria che **rilevi** un eventuale guasto di tipo 1 riconoscibile. Si precisa che una qualsiasi porta logica può essere affetta dal difetto di tipo 1, comprese le porte usate per rilevare il malfunzionamento, ma al massimo un solo guasto può essere presente nell'intero circuito. La presenza del difetto di tipo 1 deve essere segnalata mediante una linea **Err**, attiva alta;
2. la definizione di un circuito di logica combinatoria che **corregga** un eventuale guasto di tipo 1 riconoscibile. Si precisa che una qualsiasi porta logica può essere affetta dal difetto di tipo 1, comprese le porte usate per correggere o rilevare il guasto, ma al massimo un solo malfunzionamento può essere presente nell'intero circuito. In presenza di un guasto di tipo 1 in una qualsiasi parte del circuito complessivo, la linea D deve dare sempre il corretto risultato della funzione booleana 3.12;
3. la definizione di un circuito di logica combinatoria che **rilevi** un eventuale guasto di tipo 2 riconoscibile. Si precisa che una qualsiasi porta logica può essere affetta dal difetto di tipo 2 o di tipo 1, comprese le porte usate per rilevare o correggere il guasto di tipo 1 oppure quelle atte a rilevare quelle di tipo 2, ma al massimo un solo malfunzionamento può essere

presente nell'intero circuito. La presenza del guasto di tipo 2 deve essere segnalata mediante la stessa linea **Err** utilizzata per il guasto di tipo 1 e resa obsoleta dalla correzione d'errore.

Soluzione

Non si nega che l'esercizio si presenta abbastanza complesso già durante la lettura del testo. E' sicuramente necessario leggere più volte il problema prima di comprenderlo a fondo e chiaramente. D'altronde ciò è perfettamente in linea con quanto sostenuto nel capitolo 2. Si rammenta allo studente che una superficiale lettura del testo porta inevitabilmente a errori interpretativi, come pure inesorabilmente alla tanto stucchevole, quanto fin troppo ascoltata, frase: "Ah, ma io credevo che...". Conviene quindi effettuare un'attenta analisi del testo prima di procedere.

Nella prima richiesta si chiede *la definizione di un circuito di logica combinatoria che rilevi un eventuale guasto di tipo 1 riconoscibile*. Cosa si intende per "riconoscibile"? Perché è stato aggiunto tale aggettivo?

Si supponga la situazione illustrata graficamente in fig. 3.15:

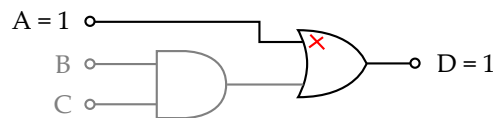



Figura 3.15: Esempio di guasto di tipo 1 non riconoscibile

L'ingresso A è posto a 1. Contemporaneamente il corrispondente ingresso della porta OR si guasta e, internamente alla porta, si pone allo stato logico 1, esattamente come come il livello della linea A. Ovviamente si avrà $D = 1$ indipendentemente dalla presenza del guasto sulla linea A o meno. Un tale malfunzionamento non è riconoscibile, per cui non si chiede di rilevarlo.

Inoltre, una seconda riflessione sulla linea **Err**. Dal testo risulta evidente, ma non è detto esplicitamente, che i circuiti sono due e distinti:

1. un circuito per la rilevazione del guasto di tipo 1;
2. un circuito per la correzione del guasto di tipo 1 e la rilevazione del guasto di tipo 2. La correzione dell'errore ha reso inutile la rilevazione del guasto di tipo 1 e quindi anche la linea Err, che può essere utilizzata per la rilevazione del guasto di tipo 2.

3.4.1 Il circuito di rilevazione del guasto di tipo 1

Chiariti tali aspetti, si deve pensare a come affrontare la prima richiesta. Sicuramente si può sostenere che per rilevare un eventuale errore è necessario conoscere sia i livelli delle linee A, B e C che quello della linea D. Quindi, senza sforzi di fantasia, si può tracciare un banale schema a blocchi della logica combinatoria atta a rilevare il guasto di tipo 1. Si noti che un siffatto circuito avrebbe 4 ingressi (A, B, C, e D), per cui sarebbe sintetizzabile mediante le

mappe di Karnaugh. Lo schema a blocchi del circuito di rilevazione del guasto di tipo 1 è illustrato in fig. 3.16.

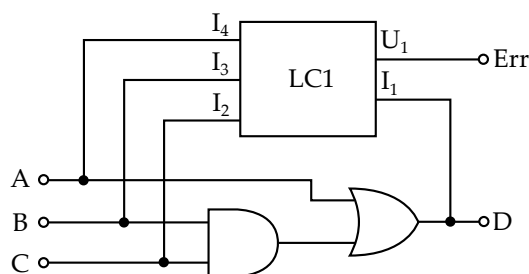



Figura 3.16: Schema a blocchi rilevazione guasto di tipo 1

Prima di poter procedere alla valutazione dell'eventuale guasto si deve, però, tracciare la tabella di verità della funzione 3.12 a pagina 41. Essa è illustrata di seguito:

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabella 3.6: Tabella di verità della funzione 3.12

Il blocco di logica combinatoria LC1, però, non ha tre variabili d'ingresso, ma quattro. Come si devono conciliare LC1 con la tab. 3.6? Semplice: le variabili A, B e C corrispondono rispettivamente a I_4, I_3 e I_2 e nella tabella di verità di LC1 detto gruppo di variabili assumerà due volte gli stessi valori: una volta per $I_1 = 0$ ed una volta per $I_1 = 1$. Quelle successioni di ingressi del blocco LC1 che corrisponderanno alle otto righe della tabella 3.6 saranno relative ad assenza di guasto di tipo 1, mentre le restanti otto righe saranno relative alla presenza del malfunzionamento. Si supponga, ad esempio, la prima riga della tabella di verità 3.6: si ha $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ e $D = 0$. Nella tabella di verità del blocco LC1 si avranno due righe corrispondenti a quella appena vista:

1. $I_4 = 0$, $I_3 = 0$, $I_2 = 0$ e $I_1 = 0$, che corrisponde all'assenza di guasto, per cui dovrà presentare $U_1 = 0$;
2. $I_4 = 0$, $I_3 = 0$, $I_2 = 0$ e $I_1 = 1$, che evidenzia, invece, un malfunzionamento, dato che $I_1 = 1$, per cui si dovrà avere $U_1 = 1$.

Alla luce di detti ragionamenti, si può tracciare la tabella di verità del blocco LC1. Detta tabella è stata redatta nella successione delle variabili di ingresso non rispettando i canoni classici del loro ordinamento, ma in modo tale che

sia facilmente confrontabile con la tabella 3.6. Le combinazioni delle variabili d'ingresso sono comunque rispettate:

I_4	I_3	I_2	I_1	U_1	Commento
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	
0	1	0	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	
0	0	0	1	1	Guasto di tipo 1
0	0	1	1	1	Guasto di tipo 1
0	1	0	1	1	Guasto di tipo 1
0	1	1	0	1	Guasto di tipo 1
1	0	0	0	1	Guasto di tipo 1
1	0	1	0	1	Guasto di tipo 1
1	1	0	0	1	Guasto di tipo 1
1	1	1	0	1	Guasto di tipo 1

Tabella 3.7: Tabella di verità del blocco LC1

Una volta ottenuta la tabella di verità il problema è banalmente risolvibile mediante uno dei metodi di sintesi noti allo studente: ad esempio, mediante le mappe di Karnaugh. Quindi l'analisi è terminata: da qui in poi si tratta di semplice sintesi. Citando una delle frasi storiche del prof. Zearo:

> *"La tabella di verità è sintetizzabile da un calcolatore, che è notoriamente più stupido di un verme. Quindi per non offendere l'intelligenza dello studente, ci fermiamo qui."*

Breve digressione. Ma non era più semplice replicare il circuito originale e confrontare le due uscite con una porta XOR? Certo che era più facile, ma solo in questo caso. Si è voluto, invece, fornire non una soluzione intuitiva (facile avere l'intuizione quando il problema è semplice), ma un metodo risolutivo analitico, di tipo generale e valido sempre, per qualsiasi problema di logica combinatoria. Se qualche allievo non fosse convinto che un buon metodo non è meglio di una buona intuizione, si lancia una sfida: lo studente provi a risolvere le restanti due parti dell'esercizio. Può darsi che una sparuta minoranza riesca a risolvere le restanti due parti con il solo intuito, senza alcun metodo: l'asserzione fatta testé dall'autore rimane comunque valida, basta aumentare la difficoltà del problema. Si ricorda allo studente che i problemi presentati nelle presenti pagine sono strettamente scolastici (o accademici): nel mondo del lavoro le difficoltà aumentano. Di molto.

3.4.2 Il circuito di correzione del guasto di tipo 1

Risolvere la seconda parte del problema è un po' più complicato. Si supponga, per semplicità, di aver risolto la prima parte dell'esercizio replicando il circuito originale e confrontando le due uscite con una porta XOR[11] (vedi fig. 3.17).

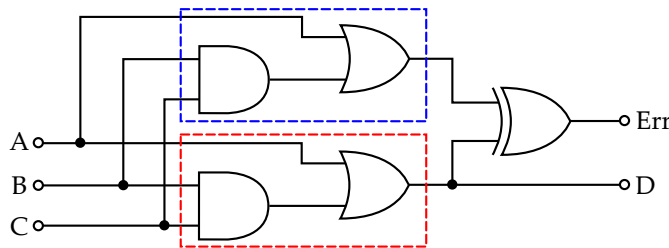



Figura 3.17: Esempio di soluzione parte prima

Se i due blocchi logici contenuti nelle due aree tratteggiate producono due valori logici diversi la porta logica XOR produce un livello logico 1 sulla linea Err. Fin qui tutto bene. L'idea funziona perfettamente e rileva un qualsiasi guasto di tipo 1 indipendentemente dove esso accada.

La correzione dell'errore prodotto, però, è un po' più complicata. Prima o poi l'uscita di una porta logica dovrà essere collegata alla linea *D* che rappresenta l'uscita corretta. Ma nel caso in cui un guasto riconoscibile di tipo 1 colpisca proprio uno degli ingressi della porta che pilota la linea *D* l'uscita di detta porta potrebbe essere modificata, vanificando la funzionalità del circuito di correzione. Apparentemente, quindi, il problema non sembra risolvibile. Almeno ad una prima superficiale analisi.

L'allievo è, però, invitato a non arrendersi alla prima difficoltà. Anzi, gli viene suggerito che una soluzione efficiente e "semplice" esiste ed è alla portata dello studente. Si tratta, quindi, di formulare una qualche strategia per affrontare questo secondo problema nel dovuto modo. Probabilmente, un primo passo da compiere, dopo averlo ben compreso, è quello di riformularlo, possibilmente dopo averlo guardato da diversi punti di vista, magari anche non del tutto convenzionali o strettamente scolastici.

Si potrebbe cercare di riformulare il problema nel seguente modo: "Quand'è che la rottura di un ingresso non compromette la funzionalità della porta logica?" Oppure, aggiungendo un po' di precisione: "Quand'è che una porta logica non modifica la propria uscita se un ingresso che dovrebbe essere a zero (internamente alla porta) va invece a 1?"

Una possibile risposta potrebbe essere: "Quando il valore logico su un ingresso è ininfluente." Oppure: "Quando è ridondante." Proviamo allora ad il-

[11]Si noti che l'attivazione della linea Err non significa necessariamente che la linea *D* indica un risultato errato rispetto alla funzione logica che rappresenta. Il malfunzionamento potrebbe colpire una porta del circuito di controllo o addirittura la stessa porta XOR, senza compromettere, in tal modo il risultato evidenziato nella linea *D*. Ciò è perfettamente corretto e in linea con le specifiche: la linea Err deve evidenziare un guasto di tipo 1, non necessariamente un errore di rappresentazione del dato *D*.

lustrare dei casi in cui un segnale logico è "ininfluente". Si veda a tal proposito la fig. 3.18.

Figura 3.18: Segnali ininfluenti in una porta OR e in una porta AND

Nella porta logica OR di fig. 3.18a, l'uscita sarà sempre a 1 qualsiasi sia il valore assunto dal livello logico presente sull'ingresso A. Analogamente, nella porta logica AND di fig. 3.18b, l'uscita sarà sempre a 0 qualsiasi sia il valore assunto dal livello logico presente sull'ingresso A. Quindi i due segnali A, sono del tutto ininfluenti nella determinazione delle uscite delle due porte logiche. "Grazie tante!", potrebbe obiettare qualcuno: "All'ingresso della porta OR c'è un 1 e all'ingresso della porta AND uno 0". Si, ma una risposta parziale è stata data.

Se non si è ancora accesa nessuna lampadina, proviamo ad illustrare due casi in cui un segnale logico è "ridondante". Si veda a tal proposito la fig. 3.19.

Figura 3.19: Segnali ridondanti in una porta OR e in una porta AND

Vediamo cosa succede se si guasta un ingresso della porta OR (fig 3.19a). Supponendo la peggior condizione, ossia che A e B siano entrambi a livello logico 0, effettivamente, in caso di guasto, l'uscita si porta a livello logico 1. Ma vediamo cosa succede se il guasto di tipo 1 si applica ad un ingresso della porta AND (fig 3.19b). La peggior condizione è $B = 1$ e $A = 0$. In tal caso, però, la ridondanza funziona, perché, anche in presenza di guasto c'è un segnale ridondante nell'altro ingresso che fa capo al segnale A. Infatti in uscita si ha $C = 0$.

Adesso, però, abbiamo fatto un grandissimo passo avanti: abbiamo una porta insensibile al guasto di tipo 1. Si potrebbe obiettare che ciò non risolve il problema, dato che non si possono usare solo porte AND nel circuito. Porte AND no, ma porte NAND si.

Il teorema di De Morgan permette, infatti, di passare agevolmente da una porta NOR ad una porta AND con gli ingressi negati, oppure da una porta NAND ad una porta OR con gli ingressi negati, come risulta evidente dalle seguenti espressioni (teorema di De Morgan):

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \tag{3.13}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{3.14}$$

Ciò significa che si può realizzare un qualsiasi circuito logico con sole porte NOR oppure con sole porte NAND. Quindi il circuito originale, attraverso i

passaggi illustrati nella sottostante figura, può essere rappresentato come in fig. 3.20c.

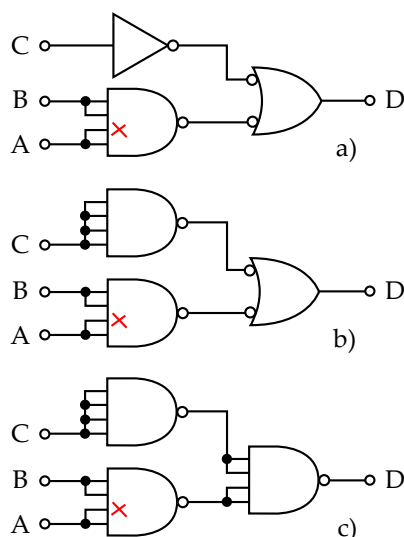



Figura 3.20: Esempio di soluzione parte seconda

Un guasto di tipo 1 che dovesse danneggiare un qualsiasi ingresso di una qualsiasi porta del circuito di fig. 3.20c risulterebbe assolutamente ininfluente, data la ridondanza degli ingressi. Missione compiuta!

Prima di concludere questa sezione si desidera, però, rammentare allo studente un piccolo particolare: nelle presenti pagine il problema è stato solamente analizzato, non risolto, sia ben chiaro.

Una chiara ed esaustiva sintesi va ben oltre a quattro porte logiche messe in croce. Non si ritiene, però, necessario eseguire anche una sintesi dettagliata, perché non strettamente attinente a questo capitolo. Si noti, infine, che detto circuito è semplicemente la rielaborazione del circuito originale mediante il teorema di De Morgan. Ora si può finalmente affrontare l'ultima domanda del problema.

3.4.3 Il circuito di rilevazione del guasto di tipo 2

L'ultima parte del problema appare ora del tutto banale. E' sufficiente applicare lo stesso metodo per la rilevazione del guasto di tipo 1, ovvero duplicare il circuito che elabora l'espressione booleana 3.12 a pagina 41 e confrontare poi le due uscite mediante una porta XOR.

Naturalmente la porta XOR deve risultare immune ai guasti di tipo 1, per cui deve essere costruita sulla base di alcune porte logiche NAND, ma ciò non appare impossibile. Anche in questo caso è sufficiente applicare il teorema di De Morgan in modo da poter scrivere la funzione XOR con sole funzioni primitive NAND.

Quindi, un primo passo potrebbe essere costituito dalla costruzione della tabella di verità della porta XOR, come di seguito illustrato:

A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabella 3.8: Tabella di verità della porta XOR

Dalla tabella di verità della porta XOR di deduce che:

$$XOR = A\overline{B} + \overline{A}B \tag{3.15}$$

per cui è immediato, utilizzando De Morgan, ottenere una espressione di sole funzioni NAND:

$$XOR = A\overline{B} + \overline{A}B \tag{3.16}$$

$$A\overline{B} + \overline{A}B = \overline{\overline{A\overline{B} + \overline{A}B}} \tag{3.17}$$

$$\overline{\overline{A\overline{B} + \overline{A}B}} = \overline{\overline{A\overline{B}}} \cdot \overline{\overline{A}B} \tag{3.18}$$

che porta al seguente circuito equivalente della porta XOR costruita con porte NAND a quattro ingressi:

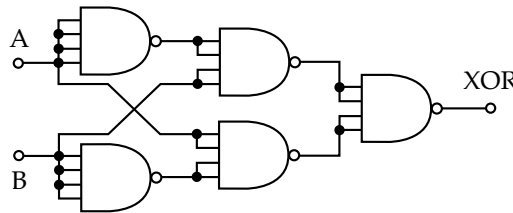



Figura 3.21: Funzione XOR con sole porte NAND

L'implementazione del circuito che risponda al terzo quesito del problema diventa ora una formalità che si lascia volontieri allo studente.

3.4.4 Commento all'esercizio

Se qualche studente si è trovato in difficoltà durante il tentativo di risolvere l'esercizio, non si preoccupi eccessivamente: non si è trattato di un esercizio semplicissimo. La difficoltà dell'esercizio è data dal fatto che non esistono diverse soluzioni, ma sostanzialmente una sola. E non è detto che l'allievo riesca a vederla.

Come procedere, allora, in casi come questo? Naturalmente non esistono ricette semplici da seguire meccanicamente quando il problema è particolarmente complesso, come la seconda parte del presente esercizio. Premesso che l'esercizio andava affrontato in maniera "scolastica", operando collegamenti

fra i macroargomenti attinenti al problema ed il problema stesso, esistono, però, delle tecniche alternative che possono dare ottimi risultati (soprattutto in ambiti extrascolastici). A tal proposito si consigliano le seguenti letture:

- *Creatività e Pensiero Laterale* - De Bono Edward, RCS Libri, 2001;
- *Sei cappelli per pensare* - De Bono Edward, BUR, 1991;
- *TRIZ Keys to Innovation* - Genrich Altshuller, Paperback, 2005.

Un sito che cerca, invece, di trattare con metodo l'approccio ai problemi scolastici di natura scientifica è il seguente:

http://www.studiomonza.it/demo/areastudenti/guida/

3.5 Concludendo sull'analisi

Sono stati presi in esame quattro problemi di analisi, cercando di guidare l'allievo nella complessa arte di suddividere un problema in sottoproblemi più semplici da affrontare separatamente. Si è presentato un problema di logica, uno di elettrotecnica e due di logica combinatoria, molto diversi fra loro, e che comunque andavano affrontati con strumenti totalmente differenti. Si sottolinea con vigore che lo studente si impadronirà della tecnica di analisi solo se saprà perseverare nell'usarla. I benefici che ne avrà saranno però enormi, non solo a livello scolastico, ma anche extrascolastico. Al fine di invogliare lo studente ad una corretta analisi si forniscono, nella sezione dedicata agli esercizi, un congruo numero di problemi da affronare analiticamente. Si insiste nel voler sottolineare che ad un primo impatto alcuni problemi possono apparire complessi se non irrisolvibili, ma ciò non è vero: sono tutti problemi affrontabili da un allievo dotato di buona volontà e tenacia. L'intelligenza, o meglio la sua insufficienza, non c'entra. Al massimo è una scusa per non lavorare.

3.6 Esercizi

Gli esercizi riportati nelle seguenti pagine sono tutti relativi a quanto esposto nel capitolo 3. Alcuni dei questi presentati sono dei problemi logici considerati dei classici.

1. ◊◊◊ Se una gallina e mezza fa un uovo e mezzo in una giornata e mezza, quante uova fanno quattro galline in un giorno?

   (Lo studente che dice "Quattro" verrà fustigato in sala mensa.)

2. ◊◊⧫ Tratto da "L'uomo che sapeva contare" di Malba Tahan, Salani Editore, 1996.

   [..] *Vi era una sola certezza, che le due* [schiave, NdA] *dagli occhi neri dicevano sempre la verità e che le altre tre* [aventi occhi azzurri, NdA] *invece mentivano. Ma questo sarebbe stato sufficiente? La domanda doveva essere banale, decisamente alla portata della fanciulla interrogata. Ma in che modo Beremiz poteva essere sicuro della risposta, se fosse vera o falsa? Era veramente una situazione molto difficile. Le cinque giovani velate stavano allineate, in totale silenzio, nel mezzo del sontuoso salone. Sceicchi e visir attendevano con vivo interesse la soluzione dello strano problema proposto dal Re.*

   *L'Uomo Che Contava si avvicinò alla prima schiava alla destra della fila e le chiese tranquillamente: "**Di che colore sono i tuoi occhi?**"*

   *La giovane rispose in una lingua che pareva cinese, una lingua sconosciuta a tutti i presenti, anche per me incomprensibile. Udendola, il Califfo ordinò che le altre risposte fossero date in arabo, semplice e preciso. L'inatteso intoppo rendeva tutto più difficile per Beremiz. Gli rimanevano solo due domande, e la risposta alla prima era andata completamente perduta. Tuttavia ciò non parve sconvolgerlo, quando, avvicinatosi alla seconda, le chiese: "**Qual è stata la risposta data dalla tua compagna?**"*

   *E la seconda schiava dichiarò: "Essa ha detto: 'I miei occhi sono azzurri'." Queste parole non sembravano portare alcun chiarimento. La seconda schiava aveva detto la verità o era stata bugiarda? E la prima? Quale era stata la sua risposta? Fu poi la volta della terza fanciulla, quella che stava al centro. A lei Beremiz chiese: "**Di che colore sono gli occhi delle due giovani che ho appena interrogato?***

   E la terza, l'ultima interpellata, disse: "La prima delle mie compagne ha gli occhi neri e la seconda li ha azzurri". Beremiz attese un istante, poi si avvicinò calmo al trono, pronunciando queste parole: "Signore di tutti i credenti, Ombra di Allah in terra, ho la soluzione al tuo problema, cui sono giunto con logica rigorosa".

   Qual è il colore degli occhi della prima schiava interrogata? E quello della seconda? E della terza? Di che colore sono gli occhi delle due restanti?

3. ◊◊◊ Siano dati i seguenti vertici di un poligono irregolare:

   (0, 5) (2, 7) (9, 8) (6,4) (9, 3) (4, 0)

Si esegua il calcolo dell'area di detto poligono irregolare di $n = 6$ lati mediante la formula dell'area di Gauss, avente la seguente struttura:

$$A_p = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right| \tag{3.19}$$

dove si intende che $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$, essendo x_i e y_i le coordinate x e y del vertice i.

4. ◊◊◊ Si calcoli l'area del poligono dell'esercizio precedente con un altro metodo, a scelta dello studente.

5. ◊◊♦ Un intervistatore bussa ad una porta di casa e quando una signora apre chiede: "Mi scusi sto facendo un'indagine. Quanti figli ha?"

   "Ho tre figlie" risponde la signora.

   "Che età hanno?"

   "Il prodotto delle loro età è 36, mentre la loro somma è uguale al numero civico di questa casa".

   L'intervistatore se ne va contento, ma ritorna dopo pochi minuti: "Quello che mi ha detto non è sufficiente per conoscere l'eta delle sue figlie."

   La signora ci pensa un po' e dice: "Mi scusi, che sbadata: la figlia maggiore ha gli occhi azzurri."

   Stavolta l'intervistatore se ne va conoscendo l'esatta età delle tre figlie.

   Che età hanno?

6. ◊◊♦ Sia dato il cubo di resistori della figura sottostante. Tutti i resistori hanno egual valore. Qual è la resistenza equivalente vista fra i vertici A e G?

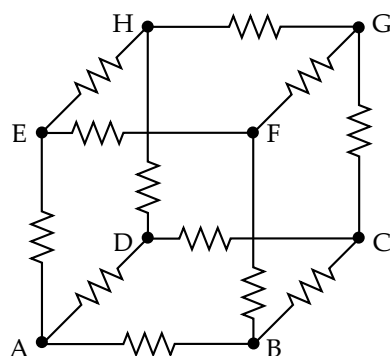



Figura 3.22: Cubo di resistori

7. ◊◊♦ Si esegua il gioco del MU. Esso consiste, data la successione di lettere di partenza MI, nell'arrivare, attraverso la rigida applicazione di 4 regole, alla stringa di arrivo MU. Il gioco è spiegato in HOFSTADTER [9] e le regole sono le seguenti:

(a) REGOLA I. Se si possiede una stringa che termina con una I, si può aggiungere una U alla fine. Esempio: da MI si può passare a MIU; da MIIUIUUI si può passare a MIIUIUUIU;
(b) REGOLA II. Si abbia Mx (dove x è una qualsiasi successione di lettere permesse o anche una singola lettera). Allora si può ottenere Mxx. Esempio: da MUM si può passare a MUMUM; da MI si può passare a MII;
(c) REGOLA III. Se in una stringa c'è la successione III, si può costruire una nuova stringa ponendo U al posto di III. La regola non è utilizzabile a rovescio: non si può sostituire una U con III. Esempio: da UMIIIMU si può passare a UMUMU; da MIIII si può passare a MIU o MUI;
(d) REGOLA IV. Se all'interno di una delle stringhe c'è UU, si può eliminare detta successione. Esempio: da MUUU si può passare a MU; da MUUUII si può passare a MUII.

8. ♢♢♦ Sia dato il circuito sottostante. Di esso si conosce $E_1 = 10V$, $E_2 = 7V$ e $R_1 \div R_4 = 100\Omega$. Si chiede la potenza erogata dai due generatori.

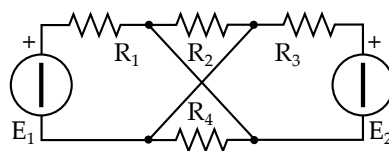
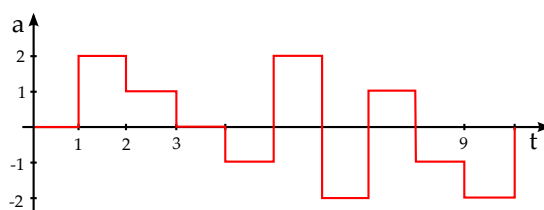



Figura 3.23: Circuito simmetrico?

9. ♢♢♦ Il più grande gomitolo di spago esistente in commercio ha circa 2m di raggio. Qual è la lunghezza totale dello spago, approssimata al più vicino ordine di grandezza?

(Tratto da "Fondamenti di Fisica" - Halliday, Resnik, Walker, Casa Editrice Ambrosiana, 2006)

10. ♢♢♢ Il sottostante grafico traccia un'accelerazione in funzione del tempo. Si tracci il relativo andamento della velocità in funzione del tempo.

11. ♢♢♦ Si lega una pecora ad un palo in un prato con una corda di lunghezza tale che essa possa nutrirsi per un giorno. Quale lunghezza occorrerà dare alla corda il secondo giorno, il terzo giorno, ecc., supponendo che l'erba non cresca né germogli?

(Il presente problema è tratto da "Matematica dilettevole e curiosa" di Italo Ghersi, Hoepli, 2002.)

12. ♢♢♦ Avendo a disposizione una fontana e due brocche, rispettivamente da 6 e da 15 litri, come si possono raccogliere precisamente 12 litri d'acqua? Questa tipologia di problemi fu studiata nel XVI secolo da Niccolò Tartaglia. Per rispetto a cotanto maestro si chiede di non risolvere il problema procedendo a caso.

13. ♢♢♢ Un resistore al 5% di tolleranza presenta il primo anello di colore Giallo ed il terzo di colore Rosso. Il secondo anello è stato rovinato e non si riesce a valutare di che colore sia. Qual è il valore commerciale del resistore?

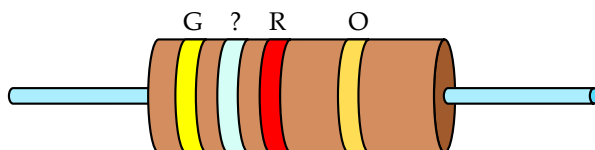



Figura 3.24: Resistore senza un anello

14. ♢♢♢ A quanti anni morì Diofanto secondo il seguente Epitaffio?

    Questa tomba rinchiude Diofanto. Oh, meraviglia! Essa dice matematicamente quanto egli ha vissuto. Dio gli accordò il sesto della sua vita per l'infanzia; aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza; inoltre per un settimo fece brillare per lui la fiamma d'Imene e dopo 5 anni di matrimonio gli diede un figlio, ahimé! unico ed infelice bambino al quale la Parca non permise di vedere che la metà della vita di suo padre. Durante quattro anni ancora consolando il suo dolore con lo studio delle cifre, Diofanto raggiunse alfine il termine della sua vita.

15. ♢♢♢ Si supponga la terra perfettamente sferica e di stendere un filo lungo l'equatore terrestre, di circonferenza pari a 40000km. Si aggiunga un metro al filo e si immagini questo nuovo anello equidistante dalla superficie terrestre. Che distanza c'è tra filo e terra?

16. ♢♢♢ Si supponga di ripetere l'esperimento con Giove (supposto anch'esso perfettamente sferico), avente una circonferenza di 449200km. Che distanza c'è tra il filo e la superficie di Giove? Che congettura si può formulare?

17. ♢♢♢ Un resistore al 5% di tolleranza cade in un barattolo di vernice blu e non è più possibile rilevarne i colori del valore commerciale. Con il multimetro si deduce che il valore resistivo del componente è 264Ω. Quali erano i colori presenti sul resistore prima della caduta? Lo studente che risponde Rosso-Azzurro-Giallo verrà fustigato in sala mensa insieme allo studente che ha sbagliato il primo esercizio.

18. ◊◊♦ Il circuito di fig. 3.25 è realizzato in forma circolare il cui raggio r è di 1m. Il generatore di tensione mette in circolo un unico elettrone che, solo soletto, scorre nel circuito alla velocità di $2.3 \cdot 10^8 m/s$. Se $R = 1M\Omega$, qual è la tensione fornita dal generatore di tensione E?

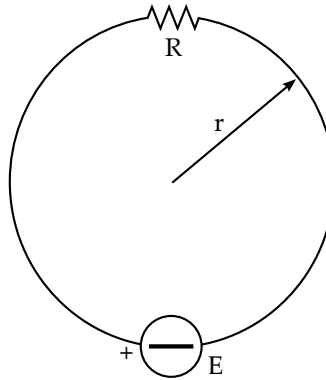



Figura 3.25: Un circuito strano

19. ◊♦♦ Il seguente testo è stato trovato addosso alla famosa spia tedesca Otto Von Delli[12]:

> *" 'Hnwkunru! Hdq uwn hacptq?' wtsqknjn pwn cù rak Nxxakrqa curtpa ctb cta cuyyqabaku, qk tkn cpnkon rub mqnka ctmuwqawu, hak tk bqxwqhhqaba nmuwpa rnjnkpq, itnkra Muwmuptn ukpwà n mawpnwybq b'qsxnchqnpn."*

Sottoposto a interrogatorio la spia ha confessato che le lettere del messaggio sono state semplicemente permutate e ha confermato la presenza, nel messaggio, della parola *stanza*. Si decifri il messaggio con l'aiuto di un foglio di calcolo o di un programma in linguaggio C appositamente scritto.[13]

20. ♦♦♦ Il seguente indovinello è stato ideato da Raymond Smullyan, noto matematico statunitese. Il collega George Boolos lo definì nel 1992 l'indovinello più difficile del mondo. Lo si propone in lingua originale. La soluzione è facilmente rintracciabile in rete.

Three gods A, B, and C are called, in some order, True, False, and Random. True always speaks truly, False always speaks falsely, but whether Random speaks truly or falsely is a completely random matter. Your task is to determine the identities of A, B, and C by asking three yes-no questions; each question must be put to exactly one god. The gods understand English, but will answer all questions in their own language, in which the words for "yes" and "no" are "da" and "ja" in some order. You do not know which word means which.

[12] Prima della cattura la spia è sempre riuscita a farla franca a causa della sua proverbiale fortuna.
[13] Si lancia una sfida ai professori di lettere, che potrebbero decifrare il messaggio senza l'ausilio della tecnologia. Ah, potenza della cultura!

Capitolo 4

La sintesi

La terza regola cartesiana era così esposta:

> "*La terza* [regola era, NdA] *di condurre con ordine i miei pensieri, cominciando dagli oggetti più semplici e più facili a conoscere, per salire a poco a poco, come per gradi, sino alla conoscenza dei più complessi; e supponendo un ordine anche tra quelli di cui gli uni non precedono naturalmente gli altri.*"

Questa è la regola cartesiana che l'allievo meglio conosce e meglio usa. E' l'applicazione di un calcolo o di una procedura (il famoso "come si fa") che permette di ottenere quel risultato concreto che il problema richiede. Attenzione, però: una corretta sintesi effettuata in seguito ad un'analisi errata e dopo aver imbavagliato il dubbio, non serve a niente.

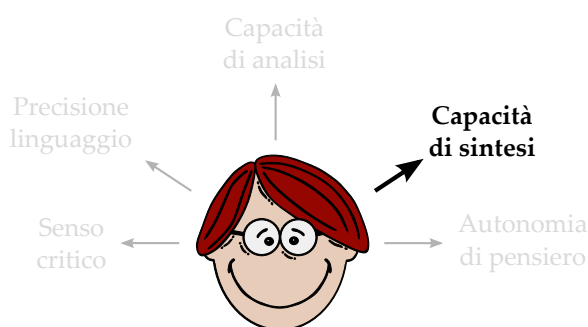



Figura 4.1: La capacità di sintesi

E' fondamentale tenere a mente che analisi e sintesi sono indiscindibilmente unite e che l'una senza l'altra o non completa l'opera o la completa in maniera spesso errata. Conoscere una formula o una procedura va quindi bene, anzi benissimo, ma è altrettanto fondamentale conoscere la teoria che la sorregge,

al fine di individuare quando si può e quando non si può applicare una determinata procedura o formula. Lo studente svogliato, invece, si preoccupa solitamente solo del "come si fa", sperando in tal modo di risparmiare tempo e fatica. Ciò è assolutamente assurdo[1] e controproducente. Lo studente si illude (vedi nota) di accorciare i tempi e la fatica, in realtà li allunga (spesso di un'estate, qualche volta di un anno) e con essi anche la fatica. Senza tener conto che il premio finale sarà un pugno di mosche, ossia un sapere assolutamente inconsistente.

Quindi il presente capitolo va inteso come una dichiarazione di guerra al "come si fa", inteso come sottocultura di una corretta sintesi. L'intero capitolo è dedicato ai cosidetti "problemi di Fermi".

4.1 Gli accordatori di New York

Il presente problema è attribuito al fisico italiano Enrico Fermi. I "Problemi di Fermi" sono ormai una vera e propria categoria di quesiti, a volte apparentemente strampalati, usati spesso per distogliere lo studente dal grezzo calcolo. L'idea consiste nello spiazzare lo studente proponendogli un quesito apparentemente impossibile, in realtà spesso innocuo e tutt'altro che impossibile.

> *"I problemi di Fermi enfatizzano la valutazione, un uso ragionato dei numeri, una matematica intesa come capacità di porsi le giuste domande. Frequentemente gli studenti credono che i problemi debbano sempre avere risposte esatte e ricavabili in un solo modo. I problemi di Fermi incoraggiano invece approcci differenti, enfatizzano il processo piuttosto che la soluzione e promuovono forme risolutive non convenzionali."*
>
> Sheila Talamo - Louisiana Univerisity
>
> http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/sheila1.html

Per passare dalle parole ai fatti si propone il seguente

Esercizio - ◊◊♦ Il problema di Fermi
Quanti accordatori di pianoforti ci sono a New York?

Soluzione
Pare che Enrico Fermi avesse utilizzato la presente domanda per "selezionare" i ricercatori che desideravano lavorare con lui. Comunque, quello che Fermi chiede non è il numero esatto di accordatori, ma un ragionamento, una valutazione e un uso equilibrato dei numeri. Premesse differenti daranno risultati diversi, ma se le premesse sono ragionevoli anche i risultati lo saranno.

[1] Il termine tedesco "Wahnsinn" rende alla perfezione l'assurdità di una tale credenza: "Wahn" significa infatti "illusione; "Sinn" significa "senso" ("Sinn ergeben" = "dare un senso"); "Wahnsinn", infine, significa semplicemente "follia" se tradotto letteralmente, ma traducendo in maniera più profonda, cercando di salvare le sfumature, si può tradurre con "dare un senso (a ciò che si sta facendo) è un illusione", cioè folle.

Si può grossolanamente stimare che New York abbia circa 10000000 di abitanti. E' evidente che si tratta di una stima, come è evidente che non c'è relazione diretta fra il numero di abitanti ed il numero di accordatori. Però esiste una indubbia correlazione indiretta ed è possibile sfruttarla.

Il prossimo passo consiste nel valutare il numero di pianoforti, organi, tastiere professionali e semiprofessionali[2] che possono necessitare di accordatura. Dove possiamo trovare dei pianoforti a New York?

- **nelle scuole di musica** - fra conservatori, parificati e non, scuole di musica classica, jazz, rock, ecc. possiamo stimare in 200 (una ogni 50000 abitanti, con stima al ribasso) le scuole in totale. Poniamo una media di 2 pianoforti a scuola, ossia **400 pianoforti**;
- **nelle chiese** - supponendo che il 70% della popolazione di New York sia di confessione cristiana ed ipotizzando una chiesa, ciascuna col proprio organo, ogni 2000 abitanti, si possono stimare circa **3500 organi**;
- **nei pianobar** - New York è famosa per i *club* dove si suona dal vivo. Ipotizzarne 500, ossia circa uno ogni 20000 abitanti, appare sensato: quindi altri **500 pianoforti**;
- **nelle famiglie** - qui la stima si complica un po'. Supponendo che ogni famiglia sia mediamente formata da 4 persone si possono contare 2500000 famiglie. Ipotizzare un pianoforte ogni 10 famiglie sembra eccessivo. Ipotizzarne uno ogni 100 famiglie sembra una sottostima quasi certa. Si suppone una famiglia ogni 25. Ciò porta a ben **100000 pianoforti** esistenti nelle famiglie di New York.[3]

Quindi un totale di

$$400 + 3500 + 500 + 100000 \approx 104000 \text{ pianoforti} \quad (4.1)$$

Ogni quanto tempo va accordato un pianoforte? Naturalmente dipende dall'uso che se ne fa, dal numero di ore di utilizzo quotidiano, ecc. Dal punto di vista professionale, un'accordatura ogni anno può essere un'ipotesi sensata, mentre nei casi di uso più ludico potrebbe bastare un accordatura ogni 2-3 anni. Siccome l'uso non strettamente professionale sembra essere predominante, si opta per un'accordatura ogni 2 anni.

Ciò significa che ogni anno devono essere accordati

$$104000/2 \approx 52000 \text{ pianoforti} \quad (4.2)$$

Quanti pianoforti può accordare un accordatore in un giorno? Anni fa, quando veniva usato il solo diapason, potevano essere necessarie 4 ore per una buona accordatura professionale, oggidì il tempo si è notevolmente ridotto. Un pianoforte classico ha 88 tasti. Stimare, quindi, 90 minuti per un'accordatura completa (una media di 1 minuto a tasto con gli accordatori elettronici è assolutamente sensato) potrebbe essere realistico. Aggiungendo 30-60 minuti per ogni spostamento (nel traffico di New York pare appropriato) si può valutare in 2.5 ore un'accordatura completa, conteggiando in tale tempo gli spostamenti,

[2]D'ora in poi non si distinguerà più fra i vari tipi di tastiere: si userà il generico termine di"pianoforte".

[3]Col senno di poi si poteva evitare di conteggiare i pianoforti di scuole, chiese e *club*, che rappresentano solo il 2% del totale. Ormai che il conto è fatto conviene tenerlo.

i parcheggi, i convenevoli, gli ascensori, la ricerca dell'indirizzo, la fatturazione, il pagamento, ecc. Quindi un totale di 3 pianoforti accordati al giorno per accordatore.

Si devono ora quantificare i giorni lavorativi annuali. 5 giorni a settimana per 48 settimane, con 30 giorni di ferie complessivi all'anno fanno 240 giorni di lavoro all'anno. Quindi ogni accordatore accorda in un anno

$$240 \cdot 3 = 720 \text{ pianoforti} \tag{4.3}$$

Siccome se ne devono accordare 52000 ogni anno il numero di accordatori sarà circa

$$52000/720 \approx 70 \tag{4.4}$$

Si giunge alla conclusione che circa 70 accordatori possano soddisfare le esigenze di una città come New York. L'ordine di grandezza è 10^2. Naturalmente, con premesse diverse si otterranno risultati diversi, ma il ragionamento appare piuttosto solido, e Fermi mirava al ragionamento, non al numero esatto.

4.1.1 Commento all'esercizio

La prima reazione dello studente che non ha mai affrontato alcun quesito appartenente alla categoria "problema di Fermi" è di stupore e incredulità, non ritenendo possibile dare una risposta logica ad un questito apparentemente assurdo. Come si è visto, invece, una risposta logica (non esatta, ma logica) esiste sempre, se si guarda il problema dal giusto punto di vista.

Anche in questo caso, il calcolo non è mai meccanico, ma è sempre sorretto da un ragionamento di tipo analitico e che mira a "suddividere" il problema in sottoproblemi. Se si supera lo stupore iniziale guidando e sorreggendo il calcolo mediante ragionamento e logica, si noterà che quello che poteva sembrare impossibile è in realtà affrontabile e risolvibile.

L'allievo si ricordi, però, che ragionamenti superficiali porteranno a risultati molto distanti dal vero, per cui, prima di effettuare calcoli ci si deve accertare di formulare ipotesi che siano plausibili e realistiche.

4.2 I peli della mucca

Un quesito classico, catalogabile fra i problemi di Fermi, è dato dal numero di peli che un determinato animale può avere.

Ne sanno qualcosa gli allievi del prof. Mario Dolcher, già illustre professore di Analisi Matematica all'Università di Trieste, che venivano posti di fronte ad un insieme particolare: l'insieme dei peli del cane. Esso, in effetti, ha tre particolarità piuttosto interessanti:

- non è infinito;
- è finito, ma densamente popolato;
- non è importante conoscere l'esatto numero degli elementi.

La valutazione approssimativa del numero di elementi di un simile insieme è l'oggetto del prossimo

Esercizio - ◊◊◊ Quanti peli ha una mucca?
Quanti peli ha una mucca di medie dimensioni?

Soluzione

Si tratta di un calcolo molto più semplice del precedente. La prima cosa da valutare è la superficie utile di una mucca di medie dimensioni. Una pelle di mucca può essere valutata in $4 \div 4.5 m^2$. A detta superficie va però sommata la superficie della testa, delle zampe e della coda, per un totale grossolano di $5m^2$.

Ora è sufficiente valutare quanti peli può ospitare ogni mm^2 di pelle bovina. Si tratta di peli piuttosto spessi, di diametro, diciamo, di 0.1mm. Si deve tener conto anche del bulbo pilifero che potrebbe avere un diametro di $0.2 \div 0.3 mm$. Un'ipotesi che sembra ragionevole potrebbe essere quella di 5 peli per mm^2. A questo punto il gioco è fatto. Prima si converte la superficie in mm^2:

$$5m^2 = 5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^6 mm^2 \tag{4.5}$$

poi si calcola il numero totale di peli:

$$5 \cdot 5 \cdot 10^6 = 25 \cdot 10^6 \tag{4.6}$$

ossia 25 milioni di peli, ossia un ordine di grandezza di 10^7.

4.2.1 Commento all'esercizio

Quesito apparentemente assurdo ma risposta piuttosto banale. Basta acquisire il giusto modo di vedere le cose che si trova una risposta logica alla domanda. Se lo studente-tipo non sapesse come quantificare l'ordine di grandezza della superficie utile di una mucca, può agevolmente immaginare l'animale come formato da un cilindro (il tronco) montato su 4 cilindri più sottili (le zampe), al quale vengono aggiunti ulteriori due cilindri (il collo e la testa) di debite dimensioni. Valutando grossolanamente e opportunamente la dimensione di

ciascun cilindro si dovrebbe giungere ad una conclusione assolutamente coerente con quella fornita nella soluzione. Aumentando il livello di suddivisione del problema (in questo caso del volume della mucca) si dovrebbe aumentare anche la precisione del risultato.

4.3 Una stampante 3D

Adesso vanno tanto di moda le stampanti 3D, per cui un esercizio su questi "nuovi" dispositivi bisognerà pur farlo. Siccome, però, non si vuol fare la figura di quelli che avendo fatto una stampa in 3D si spacciano per progettisti della stampante, si lascerà questo nuovo totem della modernità un po' sullo sfondo per portare in primo piano un oggetto un po' più antico, anzi che ha ormai più di cento anni: la curva di Hilbert.

4.3.1 Le curve di Hilbert

La *curva di Hilbert* può essere pensata come un particolare tipo di "riempitivo". Essa fu ideata da David Hilber, matematico tedesco nato a Königsberg[4] e autore della lista dei famosi 23 problemi di Hilbert, presentati al Congresso Internazionale dei Matematici tenutasi nel 1900 a Parigi. Il più famoso dei 23 problemi, quasi tutti risolti, almeno parzialmente, rimane l'ipotesi di Riemann, tutt'ora non dimostrata.

Un problema altrettanto famoso, appartenente alla suddetta lista e risolto nel 1995 da Andrew Wiles, è il cosidetto Ultimo Teorema di Fermat, oggi ribatezzato come teorema di Fermat-Wiles.

La curva di Hilbert è definita come "curva patologica" essendo posta a metà strada fra una linea spezzata ed un piano. Essa ha la particolarità di estendersi indefinitivamente e di occupare uniformemente il piano ove essa è collocata. La costruzione della curva procede come evidenziato nella figura sottostante:

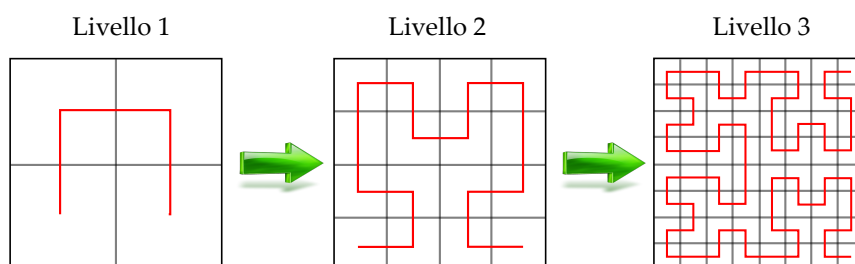



Figura 4.2: Curva di Hilbert

[4] Se volete diventare famosi, non c'è niente da fare: dovete nascere a Königsberg, l'attuale Kaliningrad facente parte del territorio Bielorusso dal 1945. Fra gli altri vi sono nati: Immanuel Kant, Christian Goldbach, David Hilbert e Gustav Robert Kirchhoff.

Livello 1

Si divide il piano (quadrato) in quattro parti uguali e si connettono i centri dei 4 quadrati con le tre linee come illustrato nella figura di sinistra, relativa al livello 1.

Livello 2

Ciò fatto si suddivide ciascun quadrato così ottenuto nuovamente in quattro parti e si congiungono i centri dei 16 quadrati con la spezzata evidenziata in rosso della figura centrale, relativa al livello 2.

Livello 3

Poi si suddivide ancora ciascun quadrato in quattro e si congiungono nuovamente tutti i centri dei 64 quadrati come evidenziato nella figura di destra, relativa al livello 3.

Questo processo può continuare indefinitivamente ed il piano viene progressivamente "riempito" uniformemente con un reticolo via via sempre più fitto. Quando si itera all'infinito come illustrato, si ottiene una "curva limite" che riempie completamente il piano:

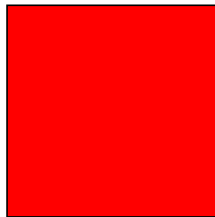



Figura 4.3: Curva limite di Hilbert

4.3.2 La "stampa"

Forniti i rudimenti sulle curve di Hilbert è possibile presentare ora l'esercizio di sintesi. Esso coinvolge, ovviamente, una stampante 3D e le curve di Hilbert, come si apprezzerà leggendo il seguente

Esercizio - ◊◊♦ Un filo lungo lungo

Nella figura 4.3.2 nella pagina successiva è visualizzato un piano suddiviso con una curva di Hilbert ottenuta con 6 livelli di iterazioni. Supponendo che il piano così suddiviso copra un'area di $25cm^2$ si calcoli

1. la lunghezza della linea spezzata così stampata dalla stampante 3D per 6 livelli;
2. considerando che un centimetro lineare del materiale usato per costruire la spezzata, di diametro uguale alla spezzata finale, pesa $0.1g$, si calcoli anche il peso della struttura "stampata" dalla stampante;
3. la lunghezza della spezzata per 50 livelli.

Soluzione

Il problema sembra essere un po' più complicato del precedente. Siano n il numero di quadrati che suddividono il piano, m il numero di segmenti che formano la spezzata e u la lunghezza del singolo segmento che forma la spezzata.

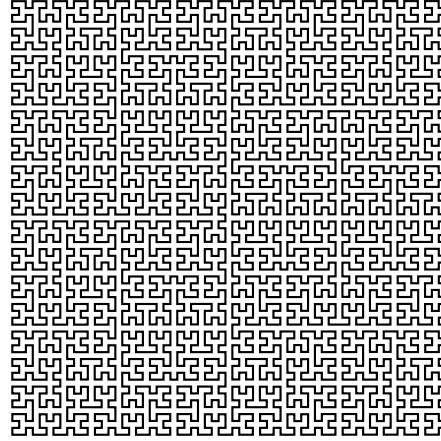



Figura 4.4: Piano di Hilbert

A livello 1 si ha $n = 4$ (ossia 2^2), $m = 3$ (ossia $n - 1$) e $u = 5/2$, per cui la lunghezza totale della spezzata è

$$u \cdot m \cdot l = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7.5 \tag{4.7}$$

A livello 2 si ha che $n = 4^2$, $m = 15$ (ossia $n - 1$) e $u = 5/4$. Quindi si ottiene

$$u \cdot m \cdot l = \frac{5 \cdot 15}{4} = 18.75 \tag{4.8}$$

A livello 3 si ha che $n = 8^2$, $m = 63$ (ossia $n - 1$) e $u = 5/8$. Quindi si ottiene

$$u \cdot m \cdot l = \frac{5 \cdot 63}{8} = 39.375 \tag{4.9}$$

A livello 4 si ha che $n = 16^2$, $m = 255$ e $u = 5/16$. Quindi si ottiene

$$u \cdot m \cdot l = \frac{5 \cdot 255}{16} = 79.6875 \tag{4.10}$$

A livello 5 si ha che $n = 32^2$, $m = 1023$ e $u = 5/32$. Quindi si ottiene

$$u \cdot m \cdot l = \frac{5 \cdot 1023}{32} = 159.84375 \tag{4.11}$$

A livello 6 si ha che $n = 64^2$, $m = 4095$ e $u = 5/64$. Quindi si ottiene

$$u \cdot m \cdot l = \frac{5 \cdot 4095}{64} = 319.921875 \tag{4.12}$$

che equivale a circa 3.2m, per un peso totale di circa 32g.

E' piuttosto facile dedurre la forma generale dell'espressione che lega la lunghezza della spezzata al livello:

$$L = u \cdot \frac{2^{2l} - 1}{2^l} \tag{4.13}$$

dove L =lunghezza totale, l =livello, u =lunghezza lato del piano orginale.

E' quindi possibile calcolare la lunghezza della spezzata per 50 iterazioni:

$$L = 5 \cdot \frac{2^{2 \cdot 50} - 1}{2^{50}} \simeq 5629499534213120cm \quad \rightarrow \quad \sim 5.63 \cdot 10^{13}m \tag{4.14}$$

che equivale a una distanza di circa **190000 anni luce** (si lascia la conversione allo studente) ovvero circa la distanza che separa la terra dalla Grande Nube di Magellano.

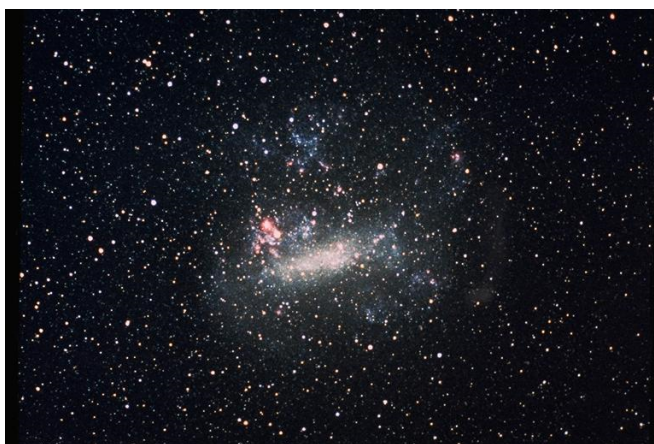



Figura 4.5: La Grande Nube di Magellano

4.3.3 Commento all'esercizio

Prima del commento vero e proprio, si riporta una curiosità. L'autore ha notato che tutti coloro che hanno letto la soluzione sono rimasti in vario grado stupiti dalla relazione 4.14 e dalla lunghezza abnorme che la spezzata può assumere dopo sole 50 iterazioni ($5.63 \cdot 10^{13}m$ pari a circa 190000 anni luce). Le stesse persone non hanno mostrato egual stupore per la figura 4.3 a pagina 61 che è invece molto più stupefacente. In essa si mostra che una spezzata ideale, formata da segmenti monodimensionali e quindi *privi di larghezza o spessore* può completamente *riempire* un piano e quindi *diventare essa stessa un piano*.

Queste ultime due righe dovrebbero far strabuzzare gli occhi a un qualsiasi non-matematico, cosa che invece non è successa. Potenza dell'infinito. A volte ci è più facile immaginare l'infinito (ma solo perché ci accontentiamo di immaginarlo male) che non un numero molto grande. Coloro i quali non si fossero lasciati stupire dalla lunghezza della succitata spezzata, possono mettere alla prova la loro immaginazione visitando il seguente sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_di_Graham

Tornando sulla terra, se l'esercizio è stato affrontato con metodo non può aver presentato grosse difficoltà. L'esercizio non è classificabile come "problema di Fermi", ma non per questo non riveste un indubbio interesse.[5] Può risultare non semplicissimo lo sviluppo della spezzata, che deve "visitare" tutti i baricentri dei quadrati in cui è suddiviso il piano, ma con un po' di pazienza si viene piuttosto facilmente a capo dei calcoli che si devono effettuare.

Anche ricavare l'espressione che pone in relazione il numero delle iterazioni con la lunghezza della spezzata non costituisce una difficoltà insormontabile: è sufficiente un po' di metodo e un po' di precisione.

Le due parole magiche del presente capitolo sono proprio loro: metodo e precisione. D'altronde la sintesi non chiede altro. Ci si deve limitare ad applicare correttamente il metodo di sintesi e senza commettere errori, ossia con precisione di calcolo. Sovente, però, lo studente inciampa proprio nelle due suddette paroline, affrontando un calcolo senza metodo oppure con precipitazione, ossia con scarsa precisione.

In modo da permettere allo studente distratto di esercitarsi ancora nel calcolo bruto si fornisce ancora un esempio di sintesi fermiana, fornendo, però stavolta, qualche dato oggettivo in più del solito.

4.4 Un lago di birra

Esercizio - ◊◊◊ Un lago di birra

Il lago di Garda si estende su una superficie di circa $370Km^2$ e ha una profondità media di $136m$, che significa un volume di circa $50Km^3$. Se fosse fatto di birra, qual è l'*ordine di grandezza* dei boccali da $500ml$ che si potrebbero riempire? Supponendo una popolazione mondiale di 7 miliardi di abitanti e supponendo di assumere come numero esatto l'ordine di grandezza calcolato nella prima domanda, quanta birra spetterebbe a ciascuno? Supponendo, infine, di svuotare il lago di Garda al ritmo di un boccale al secondo e assumendo come calcolo esatto l'ordine di grandezza precedentemente ottenuto, quanto tempo ci vorrebbe per prosciugarlo completamente?

Soluzione

Innanzi tutto è bene evidenziare subito che non c'è alcuna volontà di istigare ad un uso smodato del suddetto liquido!

Detto questo, non pare che nelle richieste dell'esercizio ci siano punti critici da analizzare o dubbi particolari da sciogliere. Si tratta effettivamente di solo calcolo o, se si preferisce, di sola sintesi. Anche questa è un'*abilità* che lo studente deve possedere. Per giunta è elencata nelle 8 competenze chiave dell'EQF fra le competenze matematiche di base, ovvero padroneggiare le quattro operazioni matematiche con disinvoltura.

Il testo chiede di calcolare l'ordine di grandezza del numero di boccali, quindi non un calcolo preciso. Lo studente allenato, quindi, dovrebbe essere in grado di rispondere alla prima domanda con il solo calcolo mentale.

[5]Di ciò si ringrazia David Hilbert, naturalmente.

L'ammontare del liquido è di $50Km^3$. Si ha quindi la necessità di convertire il volume in dm^3 in modo da poter rappresentare il volume in litri, dato che $1dm^3 = 1litro$.

Un approccio molto scolastico potrebbe essere quello di convertire i Km^3 prima in m^3 e poi quest'ultimi in dm^3. Quindi:

$$50Km^3 = 50 \cdot 1Km \cdot 1Km \cdot 1Km = 50 \cdot 1000m \cdot 1000m \cdot 1000m \tag{4.15}$$

ovvero

$$50Km^3 = 50 \cdot 10^3m \cdot 10^3m \cdot 10^3m = 50 \cdot 10^9m^3 \tag{4.16}$$

ovvero 50 miliardi di metri cubi d'acqua!

Siccome $1m^3 = 1000dm^3 = 1000l$, il lago di Garda è formato da 50000 miliardi di litri d'acqua. *Pardon*, di birra.

Se si preferisce, sono 50 trilioni di litri, ovvero 100 trilioni di calici di birra da $500ml$.

Alla prima domanda si è, quindi, risposto.

Ora dobbiamo assumere l'ordine di grandezza come numero esatto e utilizzarlo nei calcoli successivi. Quanta birra spetterebbe a ciascuno dei 7 miliardi di abitanti della terra?

Anche questo è un calcolo piuttosto banale:

$$\frac{50000 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^9} = \frac{5 \cdot 10^{13}}{7 \cdot 10^9} = \frac{5}{7}10^4 \approx 7142.9l \tag{4.17}$$

ovvero più di **14285** boccali di birra a testa! Bambini e neonati compresi. Insomma un disastro.

Anche il tempo necessario per svuotare il lago non è assimilabile ad un batter di ciglia.

100 trilioni di calici significa 100 trilioni di secondi. Quanti sono in termini di giorni, mesi e anni? Anche questo calcolo non è poi così complesso:

$$100 \cdot 10^{12}sec = 10^{14}sec = \frac{10^{14}}{60}min = \frac{10^{14}}{60 \cdot 60}ore = \frac{10^{14}}{60 \cdot 60 \cdot 24}giorni \tag{4.18}$$

ossia

$$\frac{10^{14}}{60 \cdot 60 \cdot 24}giorni = \frac{10^{14}}{86400}giorni \approx 1.1574 \cdot 10^9 giorni \tag{4.19}$$

ossia circa un miliardo di giorni. Dividendo ulteriormente per 365 e trascurando gli anni bisestili si ottengono circa **2 milioni e 700 mila anni**. Assumendo che l'uomo è apparso sulla terra circa 500 mila anni fa, si potrebbe dire senza tema che ci sarebbe da bere per un bel po'.

Volendo si potrebbe accelerare, però, lo svuotamento del lago. Sapendo che lo sviluppo costiero del bacino è di circa 158Km (fonte Wikipedia) ponendo un bevitore ad ogni metro dello sviluppo, facendo opportuni turni, si accorcerebbe drasticamente il suddetto tempo, come evidenziato nel sottostante calcolo:

$$\frac{10^{14}}{158 \cdot 10^3} = 632911392sec \tag{4.20}$$

ovvero 7325 giorni, cioè poco più di 20 anni.

4.4.1 Commento all'esercizio

I dati forniti sono talmente esaustivi che è praticamente impossibile sbagliare l'approccio al problema. Il problema è stato pre-analizzato, incartato e presentato su un piatto d'argento, per cui una palese incapacità dell'affrontare l'esercizio può essere imputabile solo a scarso impegno oppure a superficialità. Lo studente che non fosse stato in grado di affrontarlo (magari anche sbagliando qualche calcolo) farebbe bene a valutare seriamente i motivi che impediscono un sereno approccio al problema, anche parlandone con i propri compagni di classe o con i professori.

Lo studente avrà intuito che non si chiedono risultati spettacolari (se ci sono, meglio), ma piccoli passi fatti con metodo. Oppure, se si preferisce sbeffeggiare un vecchio slogan, non si chiede tutto e subito, ma almeno un pochino.

4.5 Concludendo sulla sintesi

La sintesi è la parte più "automatica" della risoluzione di un problema, ma non per questo meno importante. Per non sbagliare una sintesi è fondamentale:

- conoscere bene i vari strumenti di sintesi;
- conoscerne il campo di applicabilità, ovvero saper riconoscere se, dato un determinato contesto, il tale strumento di sintesi è utilizzabile e con quali limitazioni;
- applicare lo strumento di sintesi con ordine e precisione.

Soprattutto, però lo studente deve diffidare delle risposte date fidandosi della sola propria intuizione. Deve assicurarsi di procedere con metodo, ordine e rigore, sfruttando, certamente, la propria intuizione, ma senza farne un totem, e "passando la palla" alla ragione, rappresentata, di volta in volta, dai teoremi, dalle leggi, ecc. imparati a scuola.

4.6 Esercizi

Gli esercizi riportati nelle seguenti pagine sono tutti relativi a quanto esposto nel capitolo 4.

1. ◊◊◊ Sapendo che l'età dell'Universo è di circa 12.7 miliardi di anni, calcolare l'ordine di grandezza dei secondi trascorsi dal Big Bang ad oggi.

2. ◊◊♦ Sapendo che la distanza terra-luna è di 384400km e supponendo di possedere una bicicletta volante con ruote di raggio 13 pollici e rapporto 48/18, si calcoli il numero di pedalate necessarie per andare dalla terra alla luna. Supponendo una pedalata al secondo, si calcoli anche il tempo a ciò necessario.

3. ◊◊♦ In alcuni laboratori si stanno realizzando *wafer* da 500mm di diametro. Si tratta di supporti circolari di silicio da dove vengono ricavati i singoli *die* (ossia i singoli *chip*). Supponendo questi ultimi di dimensione $7x5mm$, quanti *die* si possono produrre con un singolo *wafer*?

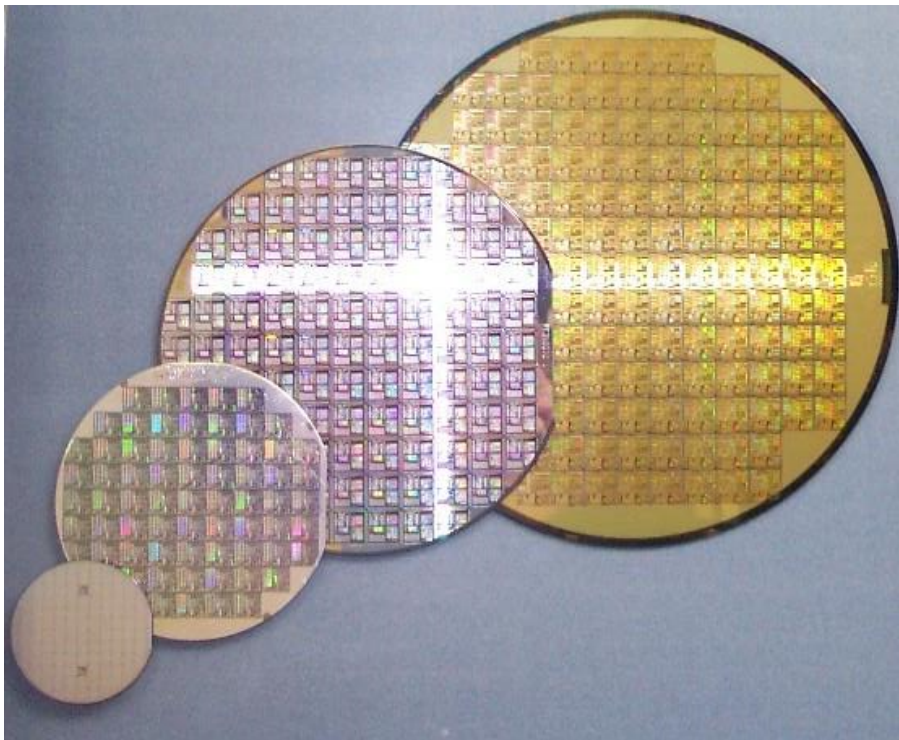



Figura 4.6: *Wafer* di silicio

4. ◊◊♦ Dopo vent'anni di onorato servizio nelle legioni di Scipione, Giulio Cornelio vuole dedicarsi alla coltivazione dei *wafer* da 500mm. Possiede un piccolo appezzamento di terreno da 100 **iugeri**. Sapendo che

servono 8 **verghe** per ottenere un iugero e 3600 **piedi quadrati** per ottenere una verga e sapendo che un piede quadrato equivale a $876.16 cm^2$, quanti *wafer* può ospitare una simile superficie? Si ottimizzi lo spazio a disposizione.

5. ◊◊◊ La terra ha un raggio equatoriale di circa 6378km. Supponendo la terra perfettamente sferica e volendola ricoprire interamente di piastrelline quadrate di 1mm di lato, qual è l'ordine di grandezza del numero di piastrelle necessarie?

6. ◊◊♦ La leggenda narra che Milziade, a capo degli eserciti di Atene, dopo la vittoria sui persiani nella battaglia di Maratona (490 a.C.), incaricò Fidippide di recare la buona notizia ad Atene. La distanza tra le città di Maratona ed Atene è di circa 40km e Fidippide percorse l'intero tragitto di corsa senza mai fermarsi. Dopo aver gridato l'annuncio della vittoria di Atene sui Persiani, gridando $N\iota\kappa\eta$, $\nu\iota\kappa\eta$ (Vittoria, vittoria), l'araldo crollò al suolo morto, stremato dallo sforzo. (fonte Wikipedia)

   Fidippede coprì la distanza alla velocità media di 7.7 **dòlichi** all'ora. Il dòlico è un'unità di misura che i Greci usavano per le corse, come lo erano lo **stadio** e il **pletro**: 1 dòlico in epoca classica corrispondeva a 12 stadi, ciascuno dei quali equivaleva a 6 pletri, che in unità moderne si può esprimere attraverso l'uguaglianza 1 pletro = 30.8 m. Quale fu la velocità media di Fidippede in metri al secondo? E in chilometri all'ora?

7. ◊◊◊ One of the most interesting aspects of the Harvard bridge over the Charles river, in Boston, is the unit of length coined for it. The Harvard bridge is measured, locally, in smoots. In 1958, members of the Lambda Chi Alpha fraternity purportedly measured the bridge's eastern sidewalk by carrying or dragging the shortest pledge that year, Oliver Smoot, end over end. Crossing pedestrians are reminded by length markers painted at 10-smoot intervals that the bridge is 364.4 smoots long, plus or minus one ear. The "plus or minus" was originally intended to express measurement uncertainty, but over the years the words "or minus" have gone missing in many citations, including the commemorative plaque on the bridge itself. The marks are repainted twice each year by member of the fraternity. Given that the bridge is 620 m long, how tall is Mr. Smoot? Ignore the ear and express the length in feet and inches (1 foot = 30.48 cm; 1 inch = 25,4 mm).

   (Questo problema ed il precedente sono tratti da "Fondamenti di Fisica" - Halliday, Resnik, Walker, Casa Editrice Ambrosiana, 2006)

8. ◊◊◊ Sapendo che nel ferro, a 20°C, il suono si propaga a 5130 m/s, si calcoli in quanti micro secondi si propaga un segnale acustico lungo una barra di ferro di 75 cm.

9. ◊◊♦ Si supponga un elettrone immerso in un campo elettrico uniforme nel punto A. Se per spostarlo da A a B si compie un lavoro pari a 1J, che ddp c'è fra A e B?

10. ◊◊◊ Se si suppone una distanza di legame tra atomo e atomo di carbonio di $1.54 \mathring{A}$, quanti atomi contiene un cubo di carbonio di $10 cm$ di lato? E una palla di carbonio di $10 cm$ di raggio?

Capitolo 5

L'enumerazione

L'ultima regola del "Metodo" era così esposta da Cartesio:

> "*L'ultima* [regola era, NdA] *di far dovunque enumerazioni così complete e revisioni così generali da esser sicuro di non aver omesso nulla*".

Quando la sintesi è terminata il problema non può dirsi ancora del tutto risolto. E' necessaria l'enumerazione, ovvero il controllo dell'analisi, e la revisione, ovvero il controllo della sintesi, prima di ritenere conclusa la ricerca della verità/soluzione.

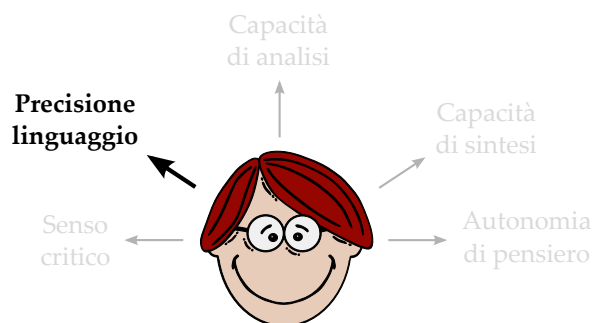



Figura 5.1: Precisione di linguaggio

Come spiegare allo studente l'importanza di tale passaggio? E, soprattutto, come lo si educa a ciò?

Sicuramente chiedere all'allievo precisione di linguaggio e di calcolo è un primo passo. Quello che Cartesio chiedeva era un controllo *attento* delle azioni di analisi e sintesi. Quest'attenzione si educa anche chiedendola allo studente durante le sue esposizioni orali e durante i suoi calcoli o le sue sintesi.

Però può succedere che durante un lungo lavoro di analisi e/o di sintesi si possa perdere la concentrazione e commettere degli errori "di distrazione".

Per questo motivo l'enumerazione diventa importante: permette di "scovare" gli errori commessi durante l'analisi o durante la sintesi e qualche volta addirittura durante la comprensione del testo o della specifica (evidenza).

Si considerino, ad esempio, i risultati degli esercizi precedenti. I numeri erano spesso talmente distanti da quelli che siamo abituati a trattare che ci sfugge completamente la loro entità reale e il significato che essi assumono. E' quindi doppiamente importante controllare e ricontrollare i conti. Sbagliare di uno o due ordini di grandezza significa compiere un errore spaventoso.

E comunque, la revisione, ovvero il controllo della sintesi, è sicuramente il più agevole dei controlli. Basta rivedere con cura i calcoli procedendo con un po' di ordine e di metodo.

Ben più infido è il controllo dell'analisi. Durante tale controllo non è sufficiente usare la calcolatrice: si deve esercitare il dubbio e verificare se le *fondamenta* delle nostre idee e intuizioni sono esatte. Ciò non è sempre così immediato e facile, ma va fatto.

Anche l'enumerazione viene affrontata attraverso alcuni esercizi.

5.1 Un errore infido

Un errore è tanto più difficile da trovare quanti meno automatismi abbiamo creato relativamente ad un determinato tipo di analisi o sintesi. Ad esempio, se dobbiamo cercare degli errori in un testo scritto in italiano abbiamo una relativa facilità a trovarli. Se il testo è scritto in olandese, incontriamo sicuramente maggiori difficoltà. Se poi è scritto in arabo, le difficoltà si moltiplicano.

Cosa significa? Che troviamo più facilmente gli errori (e ne commettiamo anche di meno, per lo stesso meccanismo) quando si tratta di argomenti che conosciamo bene. Per esplicitare quanto detto, si propone il seguente

Esercizio - ◊◊◊ Chi se n'è accorto?

L'esercizio precedente ("Un lago di birra", illustrato a pag. 64) conteneva un clamoroso errore: chi se n'è accorto? Chi non dovesse averlo notato è costretto a ripensare da capo l'intero problema ed è ciò che verrà sistematicamente fatto nelle prossime pagine.

Soluzione

I dati iniziali sono evidentemente approssimativi ma si può supporre siano sostanzialmente esatti.[1] Lo studente pignolo dovrebbe eseguire una ricerca sui testi di geografia e in rete per valutare l'esattezza dei dati iniziali. Non dovrebbe trattarsi di un compito impossibile da svolgere.

Per quanto riguarda, invece, la supposizione fatta, ovvero che il lago di Garda fosse fatto di birra, è palese che ciò non è vero: voleva essere un contributo scherzoso per mitigare la noiosità del problema. Si chiede, quindi, di stare allo scherzo e di non cercare l'errore nei dati iniziali, ma altrove.

[1] Le informazioni sono tratte (e leggermente approssimate) da Wikipedia, all'indirizzo http://it.wikipedia.org/wiki/Lago_di_Garda

Il primo calcolo fatto è relativo alla conversione da Km^3 a dm^3. E' necessario verificare se tale calcolo è esatto.

$50Km^3$ equivalgono al volume di un parallelepipedo di lunghezza $50Km$, profondità $1Km$ e altezza $1Km$. Il volume di detto parallelepipedo vale

$$V_p = \text{lunghezza} \cdot \text{profondità} \cdot \text{altezza} \tag{5.1}$$

$$V_p = 50Km \cdot 1Km \cdot 1Km = 50 \cdot 1 \cdot 1 \cdot Km \cdot Km \cdot Km = 50Km^3 \tag{5.2}$$

Un primo prudente passo potrebbe essere dato dalla conversione della 5.2 in m^3, ovvero

$$V_p = 50 \cdot 1000m \cdot 1000m \cdot 1000m = 50 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot m \cdot m \cdot m = 50 \cdot 10^9 m^3 \tag{5.3}$$

e siccome 10^9 equivale ad un miliardo, possiamo affermare senza errore che $50Km^3$ equivalgono a 50 miliardi di m^3 (di birra).

Questi passaggi sono stati fatti con grande prudenza e attenzione e non contengono né errori concettuali né errori di calcolo.

Si tratta di convertitre ora il volume da m^3 a dm^3. Perché dm^3? Perché un dm^3 equivale ad un litro.

Se ciò dovesse essere fonte di dubbio, anche remoto e piccolissimo, esso dovrebbe essere fugato. Si potrebbe procedere in maniera galileana. In fin dei conti Galileo Galilei è stato per la fisica quella pietra miliare che Cartesio è stato per la matematica.

Lo studente dubbioso potrebbe costruire un cubo di $10cm$ di lato ($1dm$), ad esempio utilizzando del cartone spesso, che non ceda facilmente. Il cubo potrebbe essere sprovvisto della sesta faccia, in modo da poterci versare dentro dell'acqua[2]. L'acqua da versare dovrebbe essere prima misurata, in modo da versare esattamente un litro. Si verificherà facilmente che il cubo verrà completamente riempito.

Fugati eventuali dubbi si può procedere alla conversione da m^3 a dm^3 in maniera sssolutamente analoga a quanto fatto precedentemente.

$$50 \cdot 10^9 m^3 = 50 \cdot 10^9 \cdot 10dm \cdot 10dm \cdot 10dm = 50 \cdot 10^{12} dm^3 \tag{5.4}$$

Tale valore equivale effettivamente a 50000 miliardi di dm^3 ($50 \cdot 10^3 \cdot 10^9 dm^3$), cioè 50000 miliardi di litri di birra, ossia 50 tri...

Trilioni? Trilionitrilionitrilioni... Ma siamo sicuri che 1000 miliardi siano un trilione? Dubbiodubbiodubbio....

Da un notissimo e molto apprezzato[3] "Dizionario della lingua italiana":

> **trilione** s.m. ~ "Unità del sistema di numerazione decimale corrispondente, per convenzione internazionale, a un milione di bilioni: *un t.* = 10^{18} ~ Nell'uso statunitense e francese il termine *trillion* corrisponde invece a mille miliardi (10^{12})."

[2]Naturalmente il cubo va tenuto insieme con del nastro adesivo robusto, capace di resistere alla pressione sulle pareti. All'interno del cubo di potrebbe alloggiare un sacchetto di plastica, in modo da evitare che le pareti si bagnino.

[3]Si evita di nominarlo esplicitamente per non recare danno alla casa editrice. Si tratta comunque dell'edizione 2003 di un famoso dizionario italiano.

> **bilione** s.m. ∼ "Unità del sistema di numerazione decimale, corrispondente oggi in Italia, Francia e Stati Uniti a un miliardo; secondo l'uso italiano antico e quello contemporaneo tedesco e inglese indica invece un milione di milioni (mille miliardi)."

In detto dizionario si sostiene, quindi, che un trilione è un milione di bilioni (10^{18}, ossia $10^6 \cdot 10^{12}$), da cui si deduce che un bilione equivale a 10^{12} ossia mille miliardi.

Nella seconda definizione si sostiene che *oggi* (l'edizione del dizionario indica l'anno 2003) il bilione in Italia, Francia e Stati Uniti equivale a un miliardo (ossia 10^9) e che secondo l'uso *antico italiano* indica invece mille miliardi (ossia 10^{12}). Come dire che le definizioni di **bilione** e **trilione** nel dizionario incriminato sono perlomeno imprecise e contraddittorie.

Continuando la ricerca sia su altri dizionari che sul web, si nota una gran confusione, non tanto sul termine "trilione", sul quale si concorda su 10^{18}, quanto sul termine "bilione": alcune autorevoli fonti indicano il valore del bilione[4] a 10^{12} altre, altrettanto autorevoli, a 10^9.

E' possibile che la confusione sia stata alimentata da un uso improrio dei rispettivi termini anglosassoni: negli Stati Uniti il *billion* equivale a un miliardo, mentre mille miliardi sono detti *trillion*. Oltre tutto, il termine *billion* in Inghilterra vale 10^{12} e negli Stati Uniti, appunto, 10^9.

Si potrebbe porre fine alla questione citando la direttiva europea nr. 55 del 21 novembre 1994, recepita dall'Italia, che fissa il valore del bilione a 10^{12} e quella del trilione a 10^{18}, ma la lingua parlata sembra sfuggire alle logiche delle direttive europee.

Comunque si è messo il dito sulla piaga: un trilione non corrisponde a mille miliardi, ma a un miliardo di miliardi! L'errore al quale si accenna nel testo dell'esercizio è proprio questo. Si potrebbe utilizzare il termine "bilione", ma vista la confusione, se ne sconsiglia l'uso, consigliando piuttosto un salomonico 10^{12}.

L'esercizio appena proposto vuole porre in evidenza quanto sia importante rivedere criticamente le soluzioni proposte e quanto facile sia incorrere in errore: lo stesso dizionario stabilisce a pagina 249 (dove si definisce il *bilione*) che il bilione equivale a 10^9 e a pagina 2198 (dove si definisce il *trilione*) che vale 10^{12}.

Ma la vera domanda su cui riflettere è: "Il lettore si era accorto dell'errore?"

5.1.1 Commento all'esercizio

Non vale! Qui si bara. Si, è vero, c'era il trucco, ma a fin di bene. L'autore ha fatto notare, però, che lo studente che non si è accorto dell'errore è perlomeno in buona compagnia: non ci si può più fidare nemmeno dei dizionari *cult*. Evidentemente è un segno dei tempi. Bisogna, però, porre grande attenzione ad errori del genere, perché potenzialmente possono creare danni notevoli. L'autore ha avuto modo, nella sua vita professionale, di vedere enormi danni

[4]Dal punto di vista etimologico e storico il bilione indica un milione al quadrato, quindi 10^{12}, ma la confusione nasce sull'uso "moderno" del termine. Si potrebbe sfruttare il dualismo delle desinenze *-one* e *-ardo*: mille milioni equivalgono a un miliardo. Ma nasce spontanea la domanda:"Mille ricconi fanno un Riccardo?".

materiali e finanziari dovuti a errori di distrazione o a superficialità, che una corretta enumerazione avrebbe posto in evidenza. Quindi è importante che lo studente eserciti un equilibrato ma "impietoso" senso critico verso il proprio lavoro, controllando e ricontrollando quanto prodotto.

5.2 L'autonomia di pensiero

Un'ultima riflessione la si vuole dedicare all'autonomia di pensiero, ultima delle caratteristiche fondanti del Bravo Studente, ma anche, e soprattutto, del Bravo Cittadino.

Perché si insiste tanto sulle caratteristiche che sono state presentate e abbinate ai quattro passi del Metodo cartesiano e di cui l'ultima, l'autonomia di pensiermo è la *summa*? Perché sono caratteristiche fondamentali ed essenziali per un buon progettista. Un bravo progettista non può fare a meno di un sano e vigoroso senso critico. Esso è fondamentale per una corretta valutazione delle specifiche di progetto e del proprio operare. Senza spiccate capacità di analisi e di sintesi, la progettazione è pura illusione, mentre la progettazione senza precisione e ordine è destinata ad essere fallimentare. Tutto ciò non è riassumibile, ma per certi versi riconducibile ad una matura autonomia di pensiero.

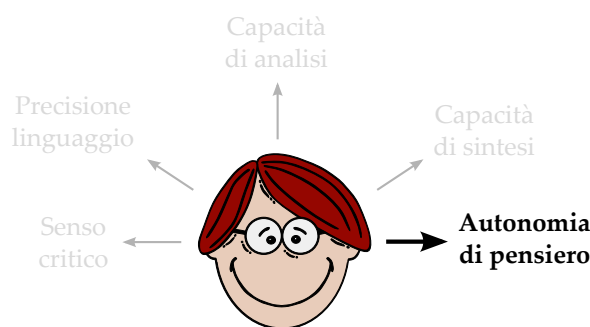



Figura 5.2: Atonomia di pensiero

Uno studente capace di pensiero autonomo ed equilibrato, con buone conoscenze tecniche, sarà una grande risorsa per l'azienda in cui lavorerà.

5.3 Concludendo sull'enumerazione

Nelle presenti pagine si sono esposti in maniera un po' utilitaristica i quattro punti cardine del Metodo cartesiano. Sebbene non si debbano prendere alla lettera, costituiscono comunque un valido punto di partenza per chi desidera affrontare un problema senza doversi affidare completamente all'intuito. Lo studente farebbe bene a riflettere su quanto fin qui esposto ed elaborare

un proprio metodo risolutivo dei problemi, anche assimilando quello cartesiano. Ciò lo aiuterà quando verrà meno l'intuito o semplicemente quando vorrà affrontare un problema in maniera rigorosa e pragmatica.

Si sottolinea, però, che lo studente non dovrebbe limitarsi al "come si fa", utilizzando grossolanamente il Metodo cartesiano, ma riflettere seriamente su di esso ed elaborare un proprio metodo, affinché ne esca rafforzato il proprio spirito critico e la propria capacità analitica.

Il pensiero di Cartesio andrebbe approfondito. Esso contiene altri ottimi spunti per il tecnico, oltre che per l'uomo, come, ad esempio, le riflessioni sulla *morale provvisoria*. Ciò richiederebbe, però, ulteriori risorse temporali che purtroppo sono sempre insufficienti nella scuola. Si lascia l'approfondimento allo studente di buona volontà, sicuri che saprà trarne giovamento (dopo) e gioia (durante) la lettura sia del "Discorso sul metodo" che delle "Regole per la guida dell'ingegno".

5.4 Esercizi

Gli esercizi riportati nelle seguenti pagine sono tutti relativi a quanto esposto nel capitolo 5.

1. ◊◊◊ Si commentino le seguenti frasi:

   > *"Non basta avere buono l'ingegno; la cosa principale è usarlo bene. Le anime più grandi come sono capaci delle maggiori virtù, così lo sono dei più grandi vizi; e quelli che camminano assai lentamente possono progredire molto di più, se seguono sempre la via diritta, di quelli che correndo se ne allontanano."*
   >
   > *Cartesio - Discorso sul Metodo*

   > *"Stare a guardare è un'arte, e anche molto difficile, ed è bene farlo anziché partire in tromba in una direzione o nell'altra. Ma non è meglio fare qualcosa? Nossignore, se non hai le idee chiare è meglio stare a guardare."*
   >
   > *Richard Feynman - Il senso delle cose*

   > *"La causa principale dei problemi è che al mondo d'oggi gli stupidi sono strasicuri, mentre gli intelligenti sono pieni di dubbi."*
   >
   > *Bertrand Russel - The Triumph of Stupidity*

2. ◊◊◊ "Scrivere 1.5Kg e 1.50Kg è la stessa identica cosa". Un qualsiasi fisico avrebbe qualcosa da ridire su tale affermazione. Cosa?

3. ◊◊♦ Dal punto di vista logico la frase "Marco mangia la pizza e beve la birra" contiene un grossolano errore. Quale?

4. ◊◊♦ Tre amici mangiano uno spuntino al ristorante e quando viene portato il conto, è di 25€. Ciascuno paga con una banconota da 10€ e il cameriere torna il resto di 5€. I tre amici si tengono ciascuno 1€ e lasciano 2€ di mancia. Uscendo dal ristorante uno dei tre amici dice: "Abbiamo pagato 9€ a testa, ossia 9 x 3 = 27€, più 2€ di mancia fa 29€. Dov'è finito 1€?". Già, appunto: dov'è finito?

   (Il presente problema è tratto da "Matematica dilettevole e curiosa" di Italo Ghersi, Hoepli, 2002.)

5. ◊◊◊ Revisiona il presente documento cercando errori e segnalandoli al seguente indirizzo

   bandiziol@katamail.com

   con titolo dell'oggetto: "Errori trovati in 'Problem Solving Strategies" specificando la versione del documento e la pagina ove compare il testo errato. In caso di effettivo errore, lo studente verrà citato esplicitamente nelle future edizioni.

Bibliografia

[1] Acerbi Fabio (a cura di), *Euclide, tutte le opere*, Bompiani, 2007

[2] Feynman Richard Phillips, *The Feynman Lectures on Phisycs Vol. I*, The New Millenium Edition, 2011

[3] Halliday David, Resnick Robert, Krane Kenneth, *Fisica 1*, Casa Editrice Ambrosiana, 2008

[4] Halliday David, Resnick Robert, Walker Jearl, *Fondamenti di Fisica*, Casa Editrice Ambrosiana, 2007

[5] Descartes René, *Regole per la guida dell'intelligenza*, Editrice Fabbri, 2006

[6] Descartes René, *Discorso sul metodo*, Casa Editrice La Scuola, 2003

[7] De Bono Edward, *Creatività e Pensiero Laterale*, RCS Libri, 2001

[8] De Bono Edward, *Sei capelli per pensare*, RCS Libri, 2013

[9] Hofstadter Douglas Richard, *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*, Penguin Books, 1980

[10] Kahneman Daniel, *Pensieri lenti e veloci*, Saggi Mondadori, 2013

Articoli

[11] Lebel Catherine, Beaulieu Christian, *Longitudinal Development of Human Brain Wiring Continues from Childhood into Adulthood*, The Journal of Neuroscience, July 27, 2011

Sitografia

[12] *CRLS Research Guide*, Cambridge Rindge & Latin School, consultabile al sito
http://www.crlsresearchguide.org/Big_Six_Steps.asp

[13] *The Big6^{TM} Skills*, consultabile al sito http://big6.com/pages/free-stuff.php

[14] *Discorso sul Metodo*, consultabile al sito http://www.ousia.it/SitoOusia/SitoOusia/TestiDiFilosofia/TestiPDF/Cartesio/Discorso/Discorso.pdf

[15] *Discorso sul Metodo*, ascoltabile su YouTube https://www.youtube.com/watch?v=lAiRsWDRxQM